UNIVERSIDAD JOSÉ CARLOS MARIÁTEGUI

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

TESIS

GENERALIZACIÓN DE LA INTEGRAL Y LA DERIVADA DE ORDEN ORDINARIO A ORDEN FRACCIONARIO, PARA LA DIDÁCTICA UNIVERSITARIA UTILIZANDO UN OPERADOR DE INTEGRACIÓN Y DERIVACIÓN, EN LA FACULTAD DE CIENCIAS - UNJBG EN EL AÑO 2013

PRESENTADA POR

LUIS CESAR MENDEZ AVALOS

ASESOR

MSc JHONY ALFONSO CHAVEZ DELGADO

PARA OPTAR GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA

MOQUEGUA – PERU

2014

ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

El propósito de esta tesis es dar una visión general del operador de integración y el operador de derivación de orden fraccionario para la didáctica universitaria, en las cuales generalizando la teoría básica de las diversas aproximaciones del operador integral y el operador derivada ordinaria se define el operador de integración y el operador de derivación fraccionarios a partir de la $n-\text{ésima}$ integral y la $n-\text{ésima}$ derivada ordinaria de una función real de variable real definida recursivamente, de igual manera se demostró la linealidad del operador integral y del operador derivada fraccional en la que se preserva sus operaciones. Así mismo, se probó el operador de integración y derivación de orden fraccionario de las funciones constante, potencial y logarítmica, contrastándolo con ejemplificaciones. Finalmente, se evaluó la efectividad de la didáctica universitaria en la generalización de la integral y la derivada de orden ordinario a orden fraccionario utilizando una población de cincuenta estudiantes, quienes participaron en un experimento, en la que cada alumno hizo una prueba del cálculo diferencial e integral fraccionario antes y después de participar en la didáctica universitaria; las pruebas estadísticas proporcionaron datos suficientes para indicar que la didáctica universitaria es efectiva a un nivel de significancia aceptable.

Palabras Claves: Integración de orden Fraccionario de Riemann-Liouville. Derivación de orden Fraccionario de Riemann-Liouville, Derivada.

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to give a general vision of the operator of integration and the operator of derivation of fractional order for the university didactics, in which generalizing the basic theory of the diverse approaches of the integral operator and the operator ordinary derivative defines the operator of integration and the operator of derivation fractional from the integral n-ésima and the derivative ordinary n-ésima of a real function of real definite variable recursivamente, of equal way there was demonstrated the linealidad of the integral operator and of the operator derivative fraccional in that his operations are preserved. Likewise, there was proved the operator of integration and derivation of fractional order of the constant, potential and logarithmic functions, confirming it with ejemplificaciones. Finally, the effectiveness of university teaching is evaluated in the generalization of integrated and derivative, ordinary order to fractional order we use a population of fifty students who participated in an experiment, each student made a test of differential and integral calculus fractionally before and after participating in university didactics statistical tests provided sufficient data to indicate that university teaching is effective to an acceptable level of significance.

Key Words: Integration of Fractional Order by Riemann-Liouville. Derivation of Fractional Order by Riemann-Liouville, derivative.

INTRODUCCIÓN

La integral y la derivada de orden fraccionario se ocupan del estudio de la teoría de operadores lineales que describen procesos de integración y de derivación de órdenes arbitrarias sobre dominios de funciones reales o complejas, y de la investigación de sus aplicaciones. En realidad, dichos operadores surgen con el objetivo de generalizar el concepto de integración y de derivación para valores no enteros.

Esta rama del análisis matemático está estrechamente relacionada con diversos problemas de la teoría de funciones, ecuaciones integrales, transformadas integrales, funciones especiales y teoría de la aproximación, entre otros, así como problemas de la física, la química, la economía, la ingeniería y en otras ciencias aplicadas.

A continuación, se da una visión resumida sobre el desarrollo de esta área de las matemáticas y de la evolución del estudio de la Integral y la derivada de orden fraccionario. La integral y la derivada fraccionaria generalizan la idea de la integral y la derivada clásica, es decir, la integración y la derivación de orden entero a orden no entero. Esta teoría no es tan nueva, pues se remonta al año de 1675; y a través del tiempo reconocidos matemáticos han estudiado este tema y han contribuido al desarrollo de lo que hoy conocemos como integral y derivada fraccionarias. Entre ellos podemos destacar a Euler, Laplace, Fourier, Liouville, Riemann, Laurent, Hardy, Littlewood, Abel, Lagrange, Riesz, Weyl. Pero, aun siendo esta una generalización de la integral y la derivada clásica, y aunque su nacimiento es igual de antiguo, sus aplicaciones recién han sido notorias en los últimos cuarenta años.

La causa de esto es debida posiblemente a la dificultad que se presenta en su parte operativa, y las diversas formulaciones de la integral fraccionaria, y en especial la falta de una clara interpretación geométrica de los operadores fraccionarios. En la primera conferencia internacional sobre la integral y la derivada fraccionaria en New Haven (USA), en 1974, la interpretación geométrica y física fueron incluidos en la lista problemas abiertos, siendo repetidas en la segundas y tercera conferencias internacionales realizadas en 1984 (Glasgow ,Gran Bretaña) ,1989 (Tokio, Japón) e incluso en el Workshop sobre la derivada y la integral fraccionaria realizado en Varna 1996, y desde ese tiempo a la actualidad la situación no ha cambiado mucho.

El primer libro dedicado a la integral y la derivada de orden fraccionario y sus aplicaciones fue escrito por Oldham-Spanier y publicado en 1974, ambos especialistas en Electroquímica. Esta cuenta con una magnifica recopilación bibliográfica del periodo (1695-1974), y recoge un buen número de propiedades básicas de algunos operadores de integración y diferenciación de orden fraccionario con aplicaciones en el cálculo clásico y en problemas de difusión. Posteriormente se publicaron otros libros, pero a pesar de esto, esta teoría se ha mantenido un poco distante de muchos investigadores, científicos e instituciones académicas.

La idea de generalizar la integral y la derivada de orden entero para integrales y derivadas de orden arbitrario, surgió con el nacimiento de la propia derivada clásica. Fue el propio Leibniz al inventar la notación de la *n*-ésima derivada

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x)\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

y posiblemente por un simple deseo de jugar con los símbolos, lo que motivo, el 30 de setiembre de 1695, al Marqués Guillaume de L'Hôpital al preguntarle ¿Qué sucedería en el caso de ser sustituida n por $1/2$?, a la que Leibniz responde, de modo intuitivo, indicándole que esta aparente paradoja permitiría en el futuro extraer consecuencias muy útiles. Más tarde se amplió el alcance a la n-ésima integral denotada por $_{a}I_{x}^{n}$ y se plantea la misma interrogante anterior ¿Qué sucedería en el caso de ser sustituida n por $1/2$? Finalmente se amplió el alcance de las preguntas anteriores a la siguiente cuestión ¿Puede ser extensible los valores de n al conjunto de los números racionales, irracionales, o complejos en dicha expresión? Conduciendo a una respuesta afirmativa, por lo cual el actual término de integral fraccionaria y derivada fraccionaria comprende el campo de los números reales o complejos.

El siguiente informe de investigación es una generalización de la integral y la derivada de orden ordinario a orden fraccionario, para la didáctica universitaria utilizando un operador de integración y derivación, la que se justifica este resultado debido principalmente, que a pesar de la gran cantidad de publicaciones en este campo, se siente la necesidad de formalizar y ordenar los conceptos, propiedades y aplicaciones de la integral y la derivada de orden arbitraria, para que sea atractiva y de fácil acceso a los investigadores de otras áreas, así como a los mismos matemáticos. Así mismo, la integral y la derivada de orden arbitrario han estado atrayendo la atención de los científicos e ingenieros desde hace mucho tiempo, como resultado en el desarrollo de muchas aplicaciones. Desde los noventa del siglo pasado la integral y la derivada de orden fraccionario está siendo redescubierta y aplicada en un número de campos, concretamente en varias áreas de la física, ingeniería de control, y procesamiento de señales.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. Descripción de la realidad problemática

1.1.1. Antecedentes del problema

La integral y la derivada fraccionaria generalizan la idea de la integral y la derivada clásica, es decir, la integral y la derivada de orden de los naturales a orden no natural. Esta teoría no es tan nueva, pues se remonta al año de 1695; y a través del tiempo reconocidos matemáticos han contribuido en su desarrollo. Pero, aun siendo esta una generalización de la integral y la derivada clásica, y aunque su nacimiento es igual de antiguo, sus aplicaciones recién han sido notorias en estas últimas décadas. La causa de esto es debido posiblemente a la dificultad que se presenta en su parte operativa, y las diversas formulaciones de la integral y la derivada fraccionaria, y en especial a la falta de una clara interpretación geométrica y física de los operadores fraccionarios. En la primera conferencia internacional sobre el cálculo fraccionario en New Haven (USA), en 1974, la interpretación física y geométrica, fueron incluidos en la lista de problemas abiertos, siendo repetidas en las conferencias internacionales realizadas en 1984, 1989 e incluso en el Workshop sobre el cálculo fraccionario realizado en Varna 1996, y desde ese tiempo la situación no ha cambiado mucho.

El primer libro dedicado al cálculo fraccionario fue publicado en 1974, en el cual se intentó dar de manera resumida los avances teóricos de su tiempo, pero no fue tan accesible a profesionales de otras disciplinas. Posteriormente se publicaron otros libros, pero a pesar de esto, esta teoría se ha mantenido un poco distante de muchos investigadores, científicos y universidades.

En general, la razón de esta problemática es debido principalmente que, a pesar de la gran cantidad de publicaciones en este campo, se siente la necesidad de formalizar y ordenar los conceptos, propiedades y aplicaciones de la integral y la derivada fraccionaria, para que sea atractiva y de fácil acceso a los investigadores de otras áreas, así como a los estudiantes de otras universidades.

De entre los ámbitos de estudio de la didáctica de la matemática nos preocupa e interesa sobre todo el referido a la didáctica universitaria en la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann (UNJBG).

Moreno (2005), indica que cada vez son más numerosas las investigaciones que buscan su centro de interés en este nivel, y en particular, sobre el papel de la didáctica en la enseñanza de las matemáticas universitarias. El hecho de que, poco a poco, se traslade el foco de interés del estudiante al profesor, o al menos los dos compartan protagonismo, hace pensar a los investigadores lo acertado de la orientación de sus investigaciones, así como de la complejidad que en sí mismo entraña el tema. Esta complejidad no solo es debida a las características particulares del profesor y de los estudiantes, sino también de la propia asignatura, cada vez más abstracta y formal, y de las características específicas de la universidad como institución, que condiciona, limita y determina los límites de actuación en ella.

En el nivel universitario la investigación didáctica no es nueva. Esta lleva realizándose durante más de 20 años. Tiempo, durante el cual, a parte de intentar mejorar la comprensión sobre las dificultades de los estudiantes y las disfunciones del sistema educativo, también se han intentado encontrar vías para superar estos problemas (Artigue, 2003).

La enseñanza del cálculo en la asignatura de matemáticas resulta bastante problemática, y aunque, seamos capaces de enseñar a los estudiantes a resolver de forma más o menos mecánica algunos problemas estándar, o bien, realizar algunas derivadas o integrales, tales acciones están lejos de lo que supondría una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las matemáticas (Moreno, 2005).

Según Artigue (1995) y Yusof y Tall (1999) señalan que los métodos tradicionales de enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario tienden a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo, que acaba siendo rutinaria. Asimismo, el profesor evalúa las competencias adquiridas por el estudiante en este dominio algorítmico y algebraico, a partir de ejercicios similares o iguales a los presentados en clase, ejercicios que responden exactamente al mismo esquema del pensamiento.

Una de las dificultades detectadas como resultado de esta forma de enseñar es que, si bien el conocimiento logrado por los estudiantes puede ser ventajoso para resolver ejercicios y problemas habituales, pero en la ocasión en que se enfrentan a situaciones que demandan mayor conocimiento conceptual, la gran mayoría falla y no saben cómo afrontar el escenario, por lo que ocurre que los estudiantes aprenden el producto del pensamiento matemático en vez del proceso.

De las dificultades evidenciadas, como los problemas detectados en los estudiantes y, en general, la insatisfacción entre profesores como también en los estudiantes ha tenido como resultados importantes en el desarrollo de las investigaciones didácticas de la enseñanza centrada en el área del cálculo fraccionario.

1.1.2. Problemática de la investigación

En la Facultad de Ciencias, específicamente en el área de matemática, se han presentado problemas en cuanto a generalizar la integral y la derivada de orden ordinario a orden arbitrario, siendo la necesidad de formalizar y ordenar cada uno de los temas a desarrollarse con la rigurosidad lógica de las definiciones y las proposiciones del cálculo fraccionario, así como la contrastación mediante las ejemplificaciones para que sea más atractiva y de fácil acceso a los docentes universitarios de otras áreas, así como a los mismos estudiantes de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann (UNJBG).

1.2. Definición del problema

1.2.1. Problema General

¿Cómo establecer la generalización de la integral y la derivada de orden ordinario a orden fraccionario, para la didáctica universitaria utilizando un operador de integración y derivación, en la Facultad de Ciencias – UNJBG, en el año 2013?

1.2.2. Problemas Específicos

(a) ¿Cómo establecer la generalización de la *n*-ésima integral ordinaria a orden fraccionario, para la didáctica universitaria utilizando un operador de integración, en la Facultad de Ciencias – UNJBG en el año 2013?

(b) ¿Cómo establecer la generalización de la *n*-ésima derivada ordinaria a orden fraccionario, para la didáctica universitaria utilizando un operador de derivación, en la Facultad de Ciencias – UNJBG en el año 2013?

1.3. Objetivo de la investigación

1.3.1. Objetivo general

Formular una didáctica universitaria mediante la generalización de la integral y la derivada de orden ordinario a orden fraccionario, utilizando un operador de integración y derivación, en la Facultad de Ciencias – UNJBG en el año 2013.

1.3.2. Objetivos específicos

(a) Analizar y resolver problemas de la integral de orden fraccionario, usando un operador de integración fraccionario para la didáctica universitaria.

(b) Analizar y resolver problemas de la derivada de orden fraccionario, usando un operador de derivación fraccionario para la didáctica universitaria.

1.4. Justificación y limitaciones de la investigación

Este informe de investigación es una generalización de la integral y la derivada de orden ordinario a orden fraccionario, para la didáctica universitaria utilizando un operador de integración y derivación, la que se justifica esta investigación debido principalmente que a pesar de la gran cantidad de publicaciones en este campo, se siente la necesidad de formalizar y ordenar los conceptos, proposiciones y ejemplificaciones de la integral y la derivada fraccionaria, para que sea más atractiva y de fácil acceso a los investigadores de otras áreas, así como a los mismos estudiantes de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann. Así mismo, la integral y la derivada fraccionaria han estado atrayendo la atención de los científicos e ingenieros desde hace mucho tiempo, como resultado es el desarrollo de muchas aplicaciones. Desde los noventa del siglo pasado la integral y la derivada fraccionaria está siendo redescubierta y aplicada concretamente en varias áreas de la física, ingeniería de control, y procesamiento de señales.

Esta tesis de maestría titulada "Generalización de la integral y la derivada de orden ordinario a orden fraccionario, para la didáctica universitaria utilizando un operador de integración y derivación, en la Facultad de Ciencias - UNJBG en el año 2013" tiene un importante alcance a nivel nacional, porque busca investigar las soluciones cualitativas de las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden fraccionario de la física matemática. Pero, al mismo tiempo, tiene como principal limitación la numerosa bibliografía teórica desde la perspectiva de la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial e integral ordinario, pero la inexistencia desde el enfoque de la didáctica universitaria en la teoría del cálculo fraccionario.

1.5. Variables

1.5.1. Operacionalización de variables

1.5.1.1. Operacionalización de la variable independiente

Para la variable independiente: el operador de integración y de derivación fraccionaria para la didáctica universitaria, su concepto operacional está dada por una función $f \in L_1[a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que para $a \le x \le b$, llamaremos a:

$$ {}_aI_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds, \quad \alpha > 0 $$

el **operador de integración fraccionaria** de *f*, de orden α.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $n-1 \le \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, el **operador de derivación fraccionaria** de orden α de una función $f \in C^n$ se define como:

$$ {}_aD_x^{\alpha} f(x) = D^n\left({}_aI_x^{(n-\alpha)} f(x)\right) $$

, donde ${}_aI_x^{(n-\alpha)}$ representa el operador de integración fraccionaria, es decir:

$$ {}_aI_x^{(n-\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-s)^{n-\alpha-1} f(s)\,ds $$

Didáctica universitaria: Ámbito del conocimiento y comunicación que se ocupa del arte de enseñar en la universidad.

1.5.1.2. Operacionalización de la variable dependiente

Para la variable dependiente: generalización de la integral y la derivada fraccionaria, su concepto operacional está dado por una función *f* que está definida en el intervalo $[a,b]$ y el límite de la suma de Riemann de *f* existe, entonces decimos que *f* es integrable en $[a,b]$ y denotamos este límite mediante

$$ \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx $$

Además $\int_a^b f(x)\,dx$ llamamos integral definida o integral de Riemann de *f* entre *a* y *b* al valor de este límite. El número *a* es el límite inferior de integración y el número *b* es el límite superior de integración.

Sea f una función real definida en un intervalo abierto conteniendo un punto x. La derivada de f en x viene dada por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que este límite exista.

1.5.2. Caracterización de las variables

(a) **Variable independiente:** Operador de integración y de derivación fraccionaria para la didáctica universitaria.

(b) **Variable dependiente:** Generalización de la integral y la derivada fraccionaria.

1.6. Hipótesis de la investigación

1.6.1. Hipótesis general

La formulación en la generalización de la integral y la derivada de orden ordinario a orden fraccionario, permitirá mejorar la didáctica universitaria utilizando un operador de integración y derivación, generando una formalización y ordenamiento inductivo de cada uno de los temas a desarrollar, la rigurosidad lógica de las definiciones y de las proposiciones del cálculo fraccionario así como la contrastación de las proposiciones mediante ejemplificaciones.

1.6.2. Hipótesis específicas

(a) La generalización de la n-ésima integral ordinaria a orden fraccionario, para la didáctica universitaria utilizando un operador de integración, es posible establecerlo mediante la formalización y ordenamiento inductivo del tema a desarrollar, la rigurosidad lógica de las definiciones y de las proposiciones del operador de la integral fraccionaria, así como la contrastación de las proposiciones mediante ejemplificaciones.

(b) La generalización de la n-ésima derivada ordinaria a orden fraccionario, para la didáctica universitaria utilizando un operador de derivación, es posible establecerlo mediante la formalización y ordenamiento inductivo del tema a desarrollar, la rigurosidad lógica de las definiciones y de las proposiciones del operador de la derivada fraccionaria, así como la contrastación de las proposiciones mediante ejemplificaciones.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes de la investigación

En cuanto al nacimiento del cálculo fraccional, según Sánchez (2011), indica que todos los historiadores matemáticos están de acuerdo en la fecha y la forma en la que se produjo. Este hecho tuvo lugar tras una publicación de Leibniz en donde introducía la notación del cálculo diferencial, en particular de la expresión conocida hoy día como $\frac{d^n y}{dx^n}$ que hace referencia a la derivada de orden *n* de la función y, con $n \in \mathbb{N}$ ¿Pero tenía sentido hacer extensible los valores de *n* al conjunto de los números racionales, irracionales, o complejos en dicha expresión? La primera persona de la que se tiene certeza que se planteó este problema fue Guillaume François Antoine, marqués de L'Hôpital, que el 30 de setiembre de 1695 escribiría una carta a Gottfried Wilhelm Leibniz argumentando una cuestión con respecto a la notación para la *n*-ésima derivada de la función: "¿Qué sucedería si *n* fuera 1/2?" a lo que Leibniz replicó: "Usted puede ver por eso, señor que uno puede expresar por una serie infinita una cantidad como $d^{1/2}xy$ o $d^{1:2}xy$. Aunque las series infinitas y geométricas son relaciones distantes, las series infinitas admiten solo el uso de exponentes que son enteros, no hace, todavía, el uso de exponentes fraccionarios... esto conduciría a una paradoja, de la que algún día se extraerán consecuencias útiles” (Sánchez, 2011).

El cálculo fraccionario es un campo de estudio de la matemática que crece fuera de las definiciones tradicionales del cálculo de operadores integrales y derivadas, de la misma manera los exponentes fraccionarios es una consecuencia de los exponentes con valor entero. El concepto de cálculo fraccionario (derivadas fraccionarias e integral fraccionaria) no es nuevo. En 1695 L’Hôpital le pregunta sobre el sentido de $\frac{d^n y}{dx^n}$ sí $n = 1/2$; es decir "¿si n es fraccionario?". Leibniz respondió que “$d^{1/2}x$ será igual a $x\sqrt{dx:x}$”. Es de conocimiento general que las derivadas e integrales de orden entero tienen claras interpretaciones físicas y geométricas. Sin embargo, en el caso de la integración y diferenciación de orden fraccionario, lo que representa un campo rápidamente creciente, tanto en teoría y en aplicaciones a problemas del mundo real, no es así. Desde la aparición de la idea de la diferenciación y la integración de orden arbitrario (no es necesario entero) no hay ninguna interpretación geométrica y física aceptable de estas operaciones por más de 300 años (Rahimy, 2010).

El cálculo fraccionario comenzó a partir de algunas especulaciones de G. W. Leibniz (1695, 1697) y L. Euler (1730), y se ha desarrollado progresivamente hasta ahora. Una lista de los matemáticos, que han proporcionado importantes contribuciones hasta mediados del siglo XX, incluye a P. S. Laplace. Sólo a partir de los años setenta el cálculo fraccionario ha sido objeto de conferencias y tratados especializados. Para la primera conferencia el mérito se debe a B. Ross, que, poco después de su PhD disertó sobre cálculo fraccionario, organizó la primera conferencia sobre cálculo fraccionario y sus aplicaciones en la Universidad de New

Haven en junio de 1974, y editado sus procedimientos. Para la primera monografía, el mérito se atribuye a K. B. Oldham y J. Spanier que, después de una colaboración conjunta que comenzó en 1968, publicó un libro dedicado al cálculo fraccional en 1974. En los últimos años un considerable interés en el cálculo fraccionario ha sido estimulado por las aplicaciones que encuentra en las diferentes áreas de las ciencias aplicadas como la física y la ingeniería, posiblemente incluyendo fenómenos fractales. Ahora hay más libros de actas y números especiales de revistas publicados que hacen referencia a las aplicaciones de cálculo fraccional en varias áreas científicas, incluyendo funciones especiales, la teoría de control, física química, procesos estocásticos, difusión anómala, reología. Varias cuestiones especiales aparecieron en la última década, que contienen documentos seleccionados y mejorados presentados en congresos y escuelas avanzadas, que se refiera diversas aplicaciones de cálculo fraccionario. Ya desde hace varios años, existen dos revistas internacionales dedicadas casi exclusivamente al tema del cálculo fraccionario: fractional calculus journal (Jefe de redacción: K. Nishimoto, Japón) se inició en 1992, y cálculo fraccionario y análisis aplicado (Jefe de Redacción: V. Kiryakova, Bulgaria) se inició en 1998 (Tenreiro, *et al.*, 2010).

El cálculo fraccionario es una teoría de integrales y derivadas de cualquier orden real arbitrario (o complejo). Tiene una larga historia del 30 de septiembre 1695, cuando la derivada de orden $\alpha = 1/2$ fue mencionado por Leibniz. La diferenciación fraccionaria y la integración fraccionaria hacen volver a muchos grandes matemáticos como Leibmz, Liouville, Grunwald, Letnikov, Riemann, Abel, Riesz y WeyI. Las integrales y las derivadas de orden no entero, y las ecuaciones integro-diferenciales fraccionarias han encontrado muchas aplicaciones en estudios recientes de la física teórica, la mecánica y las matemáticas aplicadas (Tarasov, 2010). Además, en las últimas décadas el cálculo fraccionario se convirtió en una zona de intensa investigación y desarrollo. El cartel que acompaña ilustra las importantes contribuciones durante el período 1966-2010 (Tenreiro *et al*., 2010).

Hoy existe una vasta literatura sobre el tema llamado Cálculo Fraccionario, Cálculo Fraccional o Cálculo Generalizado (Fractional Calculus, Diferintegral Calculus). Muchos artículos científicos aparecen día a día en el mundo mostrando las más variadas aplicaciones. Las aplicaciones más comunes actualmente se encuentran en Reología, Biología Cuántica, Electroquímica, Teoría de la Dispersión, Difusión, Teoría del Transporte, Probabilidad y Estadística, Teoría del Potencial, Elasticidad, Viscosidad y Teoría de Control Automático. Ya existen paquetes en Matlab para el cálculo fraccionario y para el control automático fraccionario (Arafet *et al*., 2008). Por otro lado, se presenta un panorama de los fundamentos del cálculo fraccionario y sus implicaciones para generar nuevos escenarios de modelización matemática. Las nuevas familias de ecuaciones y funciones ofrecen un contexto natural para la modelización de fenómenos asociados a efectos no locales en el espacio y de memoria en el tiempo (Vásquez & Velasco, 2011). Además, Vinagre estructuró un libro de texto que recorre desde los fundamentos y definiciones básicas del cálculo fraccionario hasta las estrategias de implantación de controladores y filtros fraccionarios, pasando por el análisis de sistemas y el diseño de controladores (Vinagre *et al*., 2005). Sin embargo, el cálculo fraccionario, involucra conexamente el estudio de algunas funciones especiales como la de Mittag-Leffler que es una generalización de la exponencial, además suelen aparecer la función gamma de Euler, serie hipergeométrica y también los coeficientes binomiales, resultando en una mayor complejidad de cálculo. Se puede demostrar que existen las transformadas de Fourier y Laplace de estos operadores y si bien resultan en expresiones con exponentes no enteros y con soluciones que involucran funciones especiales, nos permiten proyectarlo al estudio de los SLIT (Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo), para establecer equivalencias entre las EDO y las EDF. Resultando como solución natural la ya mencionada función de Mittag-Leffler en lugar de la exponencial común (Sauchelli & Laboret, 2007).

La Integración y diferenciación de orden arbitrario o cálculo fraccionario es una parte de la matemática que se extiende sobre el cálculo diferencial e integral que se utiliza para proporcionar una mejor descripción de las propiedades de los materiales; se ha demostrado que los modelos de orden fraccionario son más apropiados que los modelos de orden entero para describir algunas propiedades de los materiales (Medina & Cabrera, 2010). También, consideremos la ecuación de difusión ordinaria, $\frac{\partial}{\partial t}P(x,t)=\nabla^2 P(x,t)$ que conduce a procesos gaussianos. Una posible generalización de la ecuación de difusión es la ecuación de difusión fraccionaria es $\frac{\partial}{\partial t}P(x,t)=\nabla^\alpha P(x,t)$ donde la segunda derivada es sustituida por un orden de derivación no entero α. La solución de esta nueva ecuación de difusión (ecuación de difusión fraccionaria) conduce los procesos de Levy que se consideran como posible fuente de los procesos de difusión anómalos (Bologna, 2004). Además, el cálculo fraccionario ha utilizado en el modelado de sistemas de control, flujo de calor, la temperatura, generación de entropía y la difusión, entre otros. Algunas aplicaciones del cálculo fraccionario requieren que el orden integral o derivado no se mantenga constante, pero debe ser una función parámetro del sistema. Esto se consigue con lo que se llama ecuaciones diferenciales de orden variable y se aplica principalmente a problemas dinámicos de regímenes cambiantes, tales como osciladores de viscoelasticidad variables (Ayala & Tuesta, 2007). Por otro lado, se considera una extensión fraccionaria de los polinomios clásicos de Laguerre y su orden fraccionario se considera como la representación diferencial de Rodrigues. Por medio del operador de Caputo del cálculo fraccionario, se definen nuevas funciones de C-Laguerre, algunas de sus propiedades se dan en comparación con las propiedades correspondientes de los polinomios clásicos de Laguerre (Ishteva *et al.*, 2000). Así mismo, extendemos la transformada de Laplace discreta para desarrollar un método de la transformada discreta y definimos una familia de ecuaciones en diferencias finitas fraccionarias empleando el método de la transformación para obtener las soluciones (Atici & Eloe, 2007). Además, la más reciente teoría de las h-ecuaciones de diferencia fraccionaria, se enriquece con herramientas útiles para la solución explícita de ecuaciones discretas en la que se emplean operadores en diferencias fraccionarias izquierda y derecha (Ferreira & Torres, 2011).

Se presenta un nuevo enfoque para el modelado de señal de voz utilizando el cálculo fraccionario y se demuestra a través de simulaciones numéricas que mediante el uso de unas pocas integrales de órdenes fraccionarios como funciones de base, la señal de voz se puede modelar con precisión (Assaleh & Ahmad, 2007). También, el cálculo fraccionario se utiliza para describir las interacciones entre el fluido y la estructura sólida (Sebaa *et al*. 2006). Así mismo, los modelos de circuitos de elementos concentrados de electrodos convencionales de orden fraccionario proporcionan una mejor descripción del comportamiento del bioelectrodo observado (Magin & Ovadia, 2008). Por otro lado, un modelo dinámico lateral de un vehículo industrial se ha implementado controladores convencionales de orden fraccionario (Suárez *et al*., 2002). Así mismo, la ventaja del método de derivadas fraccionarias en la teoría de viscoelasticidad es que ofrece posibilidades para la obtención de las ecuaciones constitutivas de módulo complejo de elasticidad de los materiales viscoelásticos con sólo unos parámetros determinados experimentalmente (Soczkiewicz, 2002). También, en el procesamiento de imágenes y detección de bordes a menudo hace uso de la diferenciación de operadores de orden entero. Este artículo muestra cómo la introducción de un detector de borde basado en una diferenciación de orden no entero (fraccionario) puede mejorar el criterio de procesamiento de imágenes (Mathieu *et al*., 2003). Por otro lado, se muestra la aplicación de cálculo fraccionario a la ecuación de difusión viscosa transitoria clásica en un espacio semi-infinito para producir soluciones explícitas analíticas (fraccionarias) para el esfuerzo cortante y la velocidad de fluido en cualquier parte del dominio (Kulish & Lage, 2002). Así mismo, se desarrolla la teoría de las desigualdades diferenciales fraccionarias de operadores diferenciales Riemann-Loiuville de orden $0 < q < 1$, la cual lo utiliza para la existencia de soluciones extremales y existencia global (Lakshmikantham & Vatsala, 2007). De igual manera, los operadores diferenciales e integrales de orden arbitrario han permitido desarrollar un modelo capaz de predecir la manifestación dieléctrica de la viscoelasticidad de un polímero que presenta tres fenómenos de relajación dieléctrica (Reyes *et al.*, 2005). Comúnmente, la definición de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es utilizado en los círculos matemáticos, mientras que la definición de Caputo es a menudo preferible en problemas de interés físico cuando las condiciones iniciales se expresan en términos de derivadas enteras y se aplican los métodos de la transformada de Laplace (Pierantozzi, 2006).

Un controlador fraccionario tendrá entonces más parámetros que sintonizar que un controlador convencional, lo cual permite al control fraccionario ser más adecuado y tener una mejor respuesta. Como resultado, en general, se obtiene un controlador más robusto frente a cambios, resultado que se observa al realizar un control fraccionario adaptable directo a una planta de calentamiento inductivo (Von Borries, 2012). Por otro lado, se presenta un criterio para la estabilización de redes complejas fraccionarias, es decir, sistemas dinámicos interconectados en donde el modelo de cada sistema es representado por un operador fraccionario, estos operadores fraccionarios son extensiones de los operadores derivada e integral, comúnmente usados para modelar sistemas dinámicos (Martínez *et al*., 2009). Así mismo los principales resultados de los teoremas de Green y Gauss proporcionan versiones fraccionarias, ecuaciones fraccionarias de Euler-Lagrange, y condiciones de contorno fraccionarias. Como aplicación se discute la ecuación fraccionaria del movimiento de una cuerda vibrante (Almeida *et al*., 2010). También, una generalización fraccionaria de variaciones se utiliza para definir una estabilidad de orden no entero. Derivadas fraccionarias variacionales se sugieren para describir las propiedades de sistemas dinámicos a perturbaciones fraccionarias (Tarasov, 2011). Así mismo, el objetivo principal de esta investigación es resolver ecuaciones diferenciales-integrales y ecuaciones diferenciales en intervalos que no contengan puntos singulares de dicha ecuación, esto se hace demostrando dos teoremas, los cuales vinculan una ecuación diferencial-integral o diferencial con su forma operacional, y se hallan las soluciones usando el cálculo fraccionario (Guerra &

Kalla, 1990). Por otro lado, para la derivada fraccionaria de Riesz además de la representación integral conocida se presentan dos nuevas representaciones diferenciales, que hacen hincapié en los aspectos locales de una derivada fraccionaria. Se discuten las consecuencias de una solución válida de la ecuación de Schrödinger fraccionaria (Herrmann, 2013). También, la transformada clásica de Fourier es la herramienta que es utilizada para resolver los modelos de ecuaciones diferenciales fraccionarios, esto a pesar de que se incurre en un error básico cuando se aplica a potencias reales o complejos que como bien es sabido no cumple la regla básica de tener una correspondencia biunívoca entre la función de partida y su transformada. Este fue nuestra motivación para introducir una nueva definición de la transformada fraccionaria de Fourier, la cual resuelve el problema que presenta la transformada de Fourier mencionado anteriormente (Martínez, 2012).

Se expone primero los conceptos, definiciones aplicables, y ejecución de cálculo fraccionario (incluyendo una discusión de notación, operadores, y las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario), y segundo se muestra cómo estos pueden ser utilizados para resolver varios problemas modernos (Loverro, 2004).

Se asume que el lector tiene algunos conocimientos básicos de cálculo fraccionario, es decir, el cálculo de integrales y derivadas de orden real arbitrario. El objetivo principal de este texto es complementar, en cierto sentido, el contenido de los otros textos que tratan la teoría de cálculo fraccionario mencionado anteriormente. Vamos a discutir elasticidad no local, la viscoelasticidad, la conducción de calor (difusión) problemas, la teoría elástica y la varilla viscoelástico, las ondas en varillas viscoelásticas y el impacto de una varilla viscoelástico contra una pared rígida (Atanacković *et al*., 2013).

Se resuelven algunas preguntas del cálculo fraccionario, es decir, la teoría de los operadores diferencial e integral de orden no entero, y en particular a las ecuaciones en diferencias que contienen tales operadores. A pesar de que los primeros pasos de la teoría sí se remontan a la primera mitad del siglo XIX, surgió el tema en realidad sólo a la vida en los últimos decenios. Una característica particular es que los ingenieros y científicos han desarrollado nuevos modelos que involucran ecuaciones diferenciales fraccionarias. Estos modelos se han aplicado con éxito, por ejemplo, en mecánica (teoría de viscoelasticidad y viscoplasticidad), (bio) química (modelado de polímeros y proteínas), ingeniería eléctrica (transmisión de ondas de ultrasonido) y la medicina (modelado de tejido humano bajo cargas mecánicas) (Diethelm, 2010).

El tema de cálculo fraccionario ha alcanzado mucha popularidad e importancia durante las tres últimas décadas, más o menos, debido principalmente a sus aplicaciones demostradas en numerosos campos aparentemente diversos y generalizados de la ciencia y la ingeniería. Es efectivo porque proporciona varias herramientas potencialmente útiles para la solución de ecuaciones diferenciales e integrales, y varios otros problemas que implican funciones especiales de la física matemática, así como sus extensiones y generalizaciones en una y más variables (Kilbas *et al*., 2006).

Los estudiantes de ciencias e ingeniería de pregrado solucionan los operadores diferenciales d/dx, d^2/dx^2, d^3/dx^3, etc., y operadores integrales $I^1 f$, $I^2 f$, $I^3 f$, etc., algunos, sin duda, reflexionan sobre si es necesario que el orden de diferenciación e integración sea un entero. ¿Por qué no ha de ser un operador $d^{1/2}/dx^{1/2}$, $I^{1/2}f$ por ejemplo? o ¿ d^{-1}/dx^{-1}, $d^{\sqrt{2}}/dx^{\sqrt{2}}$ o $I^{\sqrt{3}}f$? Es a estas y otras preguntas que se abordan en el presente trabajo. Vendrá como sorpresa a un versado en el cálculo de que el operador d^{-1}/dx^{-1}, no es más que una integral indefinida en el disfraz, pero los órdenes fraccionarios de diferenciación son más misterioso porque no tienen interpretación geométrica obvia en la línea de la introducción de costumbre de derivadas e integrales como rectas tangentes y áreas. Los estudiantes que estén dispuestos a prescindir de una representación pictórica, sin embargo, pronto se dará cuenta de que las derivadas e integrales de orden fraccionario son tan tangibles como las de orden entero y que una nueva dimensión en las matemáticas se abre a él cuando el orden q del operador d^{q}/dx^{q}, se convierte en un parámetro arbitrario. No es este ejercicio estéril en matemáticas, muchos problemas en la ciencia física pura pueden ser expresados y resuelto de manera sucinta recurriendo al cálculo fraccionario (Oldham & Spanier, 1970).

La mayoría de la configuración teórica del cálculo fraccionario hecho por los matemáticos ha dirigido su atención preferentemente a las llamadas derivadas de Riemann-Liouville y/o Caputo. Debemos remarcar que la mayoría de los artículos que aparecen en la literatura científica, en el marco del cálculo fraccionario y sus aplicaciones, los autores utilizan las derivadas pero al final contrastan su modelo utilizando un enfoque numérico basado en un número finito de términos de la serie que definen la derivada de Grünwald-Letnikov. Esto puede ser confirmado en varios libros que apareció recientemente y es una justificación para la actual. Tiene la intención de presentar una base del cálculo fraccionario basado en la derivada de Grünwald-Letnikov, porque exhibe una gran coherencia lo que nos permite deducir que las otras derivadas, que aparecen como consecuencia de las propiedades de la derivada de Grünwald-Letnikov y no como una receta (Duarte, 2011).

Tentamos a investigadores multidisciplinarios de las ciencias puras y aplicadas a pensar de manera diferente y de descubrir y describir la naturaleza y los fenómenos naturales (procesos sociológicos, económicos, biológicos, físicos o químicos) con maravillosa herramienta de matemáticas llamada cálculo fraccionario, que es en realidad una generalización del cálculo clásico newtoniano, lo que todos estamos acostumbrados. Este trabajo tiene como objetivo, hacer de este tema popular y aceptable para la ingeniería y la ciencia de la comunidad para apreciar el universo de las matemáticas maravillosas, que está en entre lo clásico la diferenciación y la integración de orden entero, que hasta ahora no se reconoció mucho, y está oculto a los científicos e ingenieros. Este texto va a generar "Esencia Física e Ingeniería de cálculo fraccionario" (Das, 2011).

El cálculo clásico se enriqueció con la diferenciación y la integración de órdenes fraccionarios llamado brevemente cálculo fraccionario. La base de cálculo fraccionario está conectado con los nombres de Riemann, Liouville, Weyl, Grünwald, Letnikov y otros. Aunque los primeros trabajos en esta dirección fueron hechos hace unos dos siglos, estas ideas no habían encontrado ninguna aplicación práctica durante mucho tiempo. Sin embargo, la situación ha cambiado drásticamente durante un par de décadas, mientras que cerca de 3000 trabajos fueron publicados sobre el tema. Incluyen: problemas mecánicos inversos, cinética estocásticas y el caos dinámico, el movimiento del fluido viscoso, el flujo de la difusión del calor, electroquímica de electrodos, percolación a través de medios porosos, reología de materiales viscoelásticos, ingeniería eléctrica y radio, física del plasma, óptica cuántica y nanofísica, astrofísica y cosmología, la biofísica y la medicina (Uchaikin, 2013).

El cálculo fraccionario (CF) generaliza integrales y derivadas de órdenes no enteros. Durante la última década, el CF desempeña un papel fundamental en el modelado de un número considerable de los fenómenos, en particular, el modelado de los fenómenos de memoria dependiente y medios complejos, tales como medios porosos. El CF emergió como un instrumento importante y eficaz para el estudio de los sistemas dinámicos donde los métodos clásicos revelan fuertes limitaciones. Este texto está dedicado a la existencia y unicidad de soluciones para distintas clases de problemas Darboux para ecuaciones diferenciales hiperbólicas o inclusiones que implican la derivada fraccionaria de Caputo, la mejor derivada fraccionaria del tiempo (Abbas *et al*., 2012).

El movimiento browniano fraccionario (MBF) aparece de forma natural en el modelado de muchas situaciones, por ejemplo, al describir: las anchuras de los anillos anuales consecutivos de un árbol, la temperatura en un lugar específico como una función del tiempo, el nivel de agua en un río como una función del tiempo, los caracteres de la actividad solar como una función del tiempo, los valores del registro de devoluciones de una acción, la turbulencia financiera, es decir, la volatilidad empírica de una acción, y otros fenómenos de turbulencia, los precios de la electricidad en un mercado eléctrico liberado. El propósito de este texto es explicar esto en detalle y dar aplicaciones de la teoría resultante. Más concretamente investiga los principales enfoques utilizados para desarrollar un cálculo estocástico para MBF y sus relaciones (Biagini *et al.*, 2008).

Este artículo se ocupa de las últimas aplicaciones de cálculo fraccionario a sistemas dinámicos en la teoría de control, circuitos eléctricos con fractales, divisor de tensión generalizada, viscoelasticidad, multipolos de orden fraccionario en el electromagnetismo, la electroquímica, trazador en los flujos de fluidos, y el modelo de neuronas en la biología. Especial atención se da a los cálculos numéricos de derivadas fraccionarias e integrales (Debnath, 2003).

La nueva edición ampliada de Herrmann refleja la creciente gama de desarrollos y las manifestaciones de la aproximación fraccionaria en diferentes ramas de la física, en particular: la espectroscopia infrarroja, con una primera aplicación práctica del oscilador armónico cuántico fraccionario para describir espectros rot-vib en moléculas diatómicas desde un punto de vista generalizado. Las soluciones numéricas de la ecuación de Schrödinger fraccionaria muestran la influencia de los conceptos no locales en la mecánica cuántica. La triaxialidad como una propiedad del estado fundamental de los núcleos se investiga el uso de un modelo analítico fraccionario (Herrmann, 2013).

Un concepto matemático importante en el contexto de la dinámica fraccionaria es el principio de la subordinación, la conexión de la solución fraccionaria para su contraparte browniano. El texto también cubre un espectro representativo de aplicaciones que van desde la relajación anómala y difusión en sistemas clásicos, a la descripción de los promedios de tiempo de una sola trayectoria de serie de tiempo, un tema que entra en el foco debido a nuevas técnicas microscópicas (Klafter *et al.*, 2012).

El objetivo de este artículo es esencialmente para investigar las conexiones entre el cálculo fraccionario, viscoelasticidad lineal y movimiento de las ondas. El cálculo fraccionario, permite integrales y derivadas de cualquier orden positivo (el término "fraccionario" se mantiene sólo por razones históricas), se puede considerar una rama de la física matemática que se ocupa de ecuaciones integro-diferenciales, donde las integrales son de tipo convolución y muestran núcleos débilmente singulares de tipo ley de potencia (Mainardi, 2010).

El objetivo del texto es preparar estudiantes graduados para la investigación en el área del cálculo fraccionario, difusión anómala y colas pesadas. El texto cubre teoremas de límites básicos para variables aleatorias y vectores al azar con colas pesadas. Esto incluye la variación regular, matrices triangulares, leyes infinitamente divisibles, paseos aleatorios y convergencia de proceso estocástico en la topología de Skorokhod. Se introducen las ideas básicas de cálculo fraccionario y difusión anómala en el contexto de la teoría de la probabilidad (Meerschaert & Sikorskii, 2012).

Una nueva clase de sistemas caóticos, son los denominados sistemas caóticos de orden fraccionario. Este texto puede ser utilizado para los cursos relacionados con los sistemas no lineales, sistemas de orden fraccionario. Además es adecuado para los estudiantes de pregrado y postgrado avanzados. Es una especie de guía para sistemas caóticos fraccionarios que cuenta con material de trabajos originales de investigación, incluyendo los propios estudios del autor (Petrás, 2011).

La conferencia inaugural de Ross está destinado a servir como una propedéutica para los trabajos que se presentarán en esta conferencia cuya audiencia no homogénea incluye a científicos, matemáticos, ingenieros y educadores. Esta conferencia expositiva y de desarrollo, analizó el estudio de crecimiento de la matemática, examinando el origen y el desarrollo de una idea matemática desde su nacimiento en la curiosidad intelectual de las aplicaciones. En la estructura fundamental del cálculo fraccionario se perfila las posibilidades para el uso del cálculo fraccionario en matemáticas aplicables. La conferencia termina con una declaración del propósito del cálculo fraccionario (Ross, 1975).

2.2. Bases teóricas

2.2.1. Definiciones y teoremas fundamentales del cálculo clásico

Definición 2.1. Si *f* está definida en el intervalo cerrado $[a,b]$ y el límite de las sumas de Riemann sobre las particiones Δ

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

existe, entonces *f* es integrable en $[a,b]$ y el límite se denota por

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

El límite recibe el nombre de integral definida *f* de a a b. El número *a* es el límite inferior de integración y el número *b* es el límite superior de integración.

(Larson & Edwards, 2013).

Definición 2.2. La derivada de *f* en *x* está dada por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que exista ese límite. Para todos los x para los que exista este límite, f' es una función de x (Larson & Edwards, 2013).

Teorema 2.1. (Primer teorema fundamental del cálculo)

Sea *f* continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y sea *x* un punto (variable) en $< a,b >$.

Entonces

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

(Purcell *et al., 2*007).

Teorema 2.2. (Segundo teorema fundamental del cálculo)

Sea *f* continua (y de aquí integrable) en $[a,b]$, y sea F cualquier antiderivada de *f* en $[a,b]$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

(Purcell *et al.*, 2007).

Teorema 2.3. (Fubini) Sea *f* continua en una región plana R.

(a) Si *R* se define mediante $a \le x \le b$ y $g_1(x) \le y \le g_2(x)$, siendo g_1 y g_2 continuas en $[a,b]$, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

(b) Si *R* se define mediante $c \le y \le d$ y $h_1(y) \le x \le h_2(y)$, siendo h_1 y h_2 continuas en $[c,d]$, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dx\,dy$$

(Zill & Wright, 2011).

2.2.2. Operadores de integración y derivación entera

Definición 2.3. Un operador es una transformación que transforma una función a otra función

(Kreyszig *et al.*, 2011).

Es decir un operador es un objeto matemático que convierte una función en otra, por ejemplo, el operador derivada convierte una función en otra función diferente llamada la función derivada. Los operadores suelen tener su inversa, esto significa que el operador inversa del operador derivada es el operador integral.

Es conveniente utilizar las notaciones convencionales introducidas en la siguiente definición.

Definición 2.4.

(a) Denotamos por D al operador que transforma una función *f* diferenciable en su derivada, es decir

$$Df(x) = f'(x).$$

Denotamos por ${}_aI_x$ al operador que transforma una función *f* en su integral, se supone que *f* es integrable de Riemann en el intervalo cerrado $[a,b]$, siendo los subíndices los límites de integración desde a hasta x, es decir

$${}_aI_x f(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

para $a \le x \le b$.

(b) Para $n \in \mathbb{N}$ utilizamos los símbolos D^n y ${}_aI_x^n$ para indicar las *n*-veces que se repite D y ${}_aI_x$, respectivamente, es decir

$$D^1 f(x) = Df(x)$$

$${}_aI_x^1 f(x) = {}_aI_x f(x)$$

$$D^n f(x) = DD^{n-1} f(x), \; n \geq 2$$

$${}_aI_x^n f(x) = {}_aI_x \; {}_aI_x^{n-1} f(x), \; n \geq 2$$

(Diethelm, 2010).

Teniendo en cuenta la lectura del teorema 2.1 (primer teorema fundamental del cálculo), en nuestra notación se escribe:

$$D\, {}_aI_x f(x) = f(x)$$

lo que implica que

$$D^n \, {}_aI_x^n f(x) = f(x) \qquad \textbf{(2.1)}$$

para $n \in \mathbb{N}$, es decir, D^n es la inversa por la izquierda de ${}_aI_x^n$ en un espacio adecuado de funciones.

Lema 2.1. Sea f una función integrable de Riemann en $[a,b]$. Luego para $a \leq x \leq b$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$${}_aI_x^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt \qquad \textbf{(2.2)}$$

(Kilbas *et al.*, 2006).

Lema 2.2. Sea $m,n \in \mathbb{N},$ tal que $m > n,$ y sea f una función que tiene una n-ésima derivada continua en el intervalo $[a,b].$ Entonces

$$D^n f(x) = D^m \, {}_aI_x^{m-n} f(x) \qquad \textbf{(2.3)}$$

(Debnath, 2003).

Teorema 2.4. Si $m,\ n \in \mathbb{N},\ x > a$

(a) ${}_aI_x^n \lambda f(x) = \lambda \, {}_aI_x^n f(x)$

(b) ${}_aI_x^n(f(x)+g(x)) = {}_aI_x^n\, f(x) + {}_aI_x^n\, g(x)$

(c) ${}_aI_x^m\, {}_aI_x^n f(x) = {}_aI_x^{m+n} f(x)$

(Ross, 2013).

Teorema 2.5. Si $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(a) $D^n \lambda\, f(x) = \lambda D^n f(x)$

(b) $D^n(f(x)+g(x)) = D^n f(x) + D^n g(x)$

(c) $D^n(f\,g)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k f(x) D^{n-k} g(x)$

(Amann & Escher, 2005).

2.2.3. Funciones especiales para la integral y la derivada de orden fraccionaria

La función Gamma fue introducida por Euler en el siglo XVIII; la interpretación más simple que podemos dar de esta función es que constituye la generalización de la factorial de todo número real, aunque el argumento de esta sea en general un número complejo.

Definición 2.5. Sea $x > 0$. A la función Γ definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \qquad \textbf{(2.4)}$$

se le denomina función gamma de Euler.

(Levedev, 1972).

Teorema 2.6. Sea $x > 0$, entonces se verifica que

(a) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $x > 0$

(b) Si x es un entero no negativo, entonces $\Gamma(x+1) = x!$

(c) Si x es un entero positivo, entonces $\Gamma(x+1/2) = \frac{(2x)!}{2^{2x}\,x!}\sqrt{\pi}$

(Levedev, 1972).

Definición 2.6. Sea $x > 0$ y $y > 0$. A la función B definida por

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \qquad \textbf{(2.5)}$$

se le denomina función beta (Bell, 1968).

Tabla 1
Valores de la función gamma

$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt, \ x > 0$					
x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1	1	$7/3$	1,1906...	$3/5$	1,4892...
$1/2$	$\sqrt{\pi}$	$8/3$	1,5046...	$4/5$	1,1642...
$3/2$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$	$10/3$	2,7782...	$6/5$	0,9182...
$5/2$	$\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$	$11/3$	4,0122...	$7/5$	0,8873...
$7/2$	$\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$	$1/4$	3,6256...	$8/5$	0,8935...
$9/2$	$\frac{105}{16}\sqrt{\pi}$	$3/4$	1,2254...	$9/5$	0,9314...
$11/2$	$\frac{945}{32}\sqrt{\pi}$	$5/4$	0,9064...	$11/5$	1,1018...
$13/2$	$\frac{10395}{64}\sqrt{\pi}$	$7/4$	0,9191...	$1/6$	5,5663...
$1/3$	2,6789...	$9/4$	1,1330...	$5/6$	1,1288...
$2/3$	1,3541...	$11/4$	1,6084...	$7/6$	0,9277...
$4/3$	0,8930...	$1/5$	4,5908...	$11/6$	0,9407...
$5/3$	0,9027...	$2/5$	2,2182...	$13/6$	1,0823...

Fuente: elaboración propia

Teorema 2.7. Sea $x > 0$ e $y > 0$, entonces se verifica

(a) $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

(b) $B(x,y) = B(y,x)$

(Bell, 1968).

Definición 2.7. La derivada logarítmica de la función Gamma se le denomina la función digamma y se define por

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \quad z > 0 . \qquad \textbf{(2.6)}$$

También se le conoce como la función psi (ψ) o de Euler.

(Chaudhry & Zubair, 2002).

Tabla 2
Valores de la función digamma

$\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad x > 0$
$\psi(1) = -\gamma$
$\psi(n+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad (n = 0,1,2,3,\ldots)$
$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2$
$\psi\left(\frac{1}{3}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\ln 3$
$\psi\left(\frac{1}{4}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2} - 3\ln 2$
$\psi\left(\frac{2}{3}\right) = -\gamma + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\ln 3$
$\psi\left(\frac{3}{4}\right) = -\gamma + \frac{\pi}{2} - 3\ln 2$

Fuente: Chaudhry & Zubair, 2002

Teorema 2.8. (Propiedades de la función digamma)

(a) $\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z}$, $z>0$

(b) $\psi(1)=\Gamma'(1)=-\gamma$, donde $\gamma=0{,}5772156649015328606065120900...$, es llamada la constante de Euler.

(c) Si $\alpha>-1$ y $\beta>-1$, entonces

$$\Gamma(z)=\int_0^1\frac{x^\alpha-x^\beta}{1-x}dz=\psi(\beta+1)-\psi(\alpha+1)$$

(Chaudhry & Zubair, 2002).

2.2.4. Espacios de funciones

Las propiedades de los operadores lineales de la integral y derivada de orden fraccionaria serán válidas para ciertas funciones f que sean suficientemente bien definidas.

Definición 2.8. (Espacio $L_p[a,b]$)

Sea $p\geq 1$. El espacio de funciones integrables en $[a,b]$, denotado por $L_p[a,b]$ es

$$L_p[a,b]=\left\{f\,/\,f:[a,b]\rightarrow R \text{ es medible sobre } [a,b] \text{ y } \int_a^b |\,f(x)\,|^p\,dx<\infty\right\}$$

(Bowers & Kalton, 2010).

Definición 2.9. Una función $f:X\rightarrow\mathbb{R}$ es medible o $\mathscr{A}$- medible si $\forall$ $a\in\mathbb{R}$ se tiene

$$f^{-1}(<a,\infty>)=\{x\in X\,/\,f(x)>a\}\in\mathscr{A}$$

donde $\mathscr{A}$ es una colección de subconjuntos de X.

(Richardson, 2009).

Proposición 2.9.

(a) Toda función continua es medible.

(b) Existen funciones medibles que no son continuas en ningún punto.

(Asplund & Bungart, 1966).

Definición 2.10. Se dice que una propiedad es cierta para casi todo x si es cierta excepto tal vez en un conjunto de medida nula

(Alegría, 2007).

Definición 2.11. (Espacio $C^m[a,b]$)

Sea $m \in \mathbb{N}$. El espacio de funciones continuas en $[a,b]$ denotado por $C^m[a,b]$ se define:

$$C^m[a,b] = \{\, f \,/\, f:[a,b] \to \mathbb{R} \textit{ tiene } m-\textit{ésima derivada continua} \,\}$$

En particular, para $m = 0$, $C^0[a,b] = C[a,b]$, es el espacio de funciones continuas de *f* en $[a,b]$.

(Diethelm, 2010).

Definición 2.12. (Espacio $AC[a,b]$)

El espacio de funciones absolutamente continuas en $[a,b]$ denotada por $AC[a,b]$ se define:

$$AC[a,b] = \left\{ \begin{array}{c} f \,/\, f:[a,b] \to \mathbb{R} \textit{ es absolutamente continua y} \\ f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt,\ f' \in L_1[a,b] \end{array} \right\}$$

(Diethelm, 2010).

2.3. Marco conceptual

2.3.1. Didáctica universitaria

Etimológicamente la palabra didáctica se deriva del griego didaskein: enseñar y tekner: arte, entonces, se puede decir que es el arte de enseñar. (Hernández, 2007).

La didáctica no es otra cosa que "el arte de enseñar", y todas las palabras con la misma raíz tienen que ver con el término "enseñanza" (Brousseau, 1990). Por otro lado, la didáctica (está en camino de ser) es una ciencia y tecnología que se construye, desde la teoría y la práctica, en ambientes de relación y comunicación intencional, donde se desarrollan procesos de enseñanza y aprendizaje para la formación del alumno (Benedito, 1987). Similarmente, la didáctica es la disciplina que explica los procesos de enseñanza-aprendizaje para proponer su realización consecuente con las finalidades educativas (…), se entiende por procesos de enseñanza-aprendizaje, el sistema de comunicación intencional que se produce en un marco institucional y en el que se generan estrategias encaminadas a provocar el aprendizaje (Contreras, 1990). Así mismo, hablar de didáctica es hablar de Docencia. De toda la docencia. No es, por tanto, hablar de pedagogía o de pedagogos, sino de docencia y docentes. Esto es, del trabajo que todos los profesores y profesoras universitarios hacemos en las clases, en los laboratorios, en la formación de nuestros estudiantes (Zabalza, 2007). La Didáctica es la disciplina o tratado riguroso de estudio y fundamentación de la actividad de enseñanza en cuanto propicia el aprendizaje formativo de los estudiantes en los más diversos contextos (Medina, 2009). Además la didáctica de las matemáticas puede seguir siendo considerada como la ciencia de los fenómenos y los procesos didácticos, con la condición de que "didáctico" se entienda como "relativo al estudio de las matemáticas" (Gascón, 1998). Así mismo, podríamos conceptuar a la didáctica universitaria como el ámbito de conocimiento y comunicación que se ocupa del arte de enseñar en la universidad (De la Herrán, 2001).

2.3.2. Operador de integración fraccionaria

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$. El operador de integración fraccionaria de orden α de una función $f \in L_1[a,b]$, es definido

$$ {}_aI_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds, \quad \alpha > 0, $$

para $a \leq x \leq b$.

2.3.3. Operador de derivación fraccionaria

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$ y $n \in \mathbb{Z}^{+}$ tal que $n-1 \leq \alpha < n$. La derivada fraccionaria de orden α de una función $f \in C^{n}[a,b]$, es definida por

$$ {}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\,dt, \quad \alpha > 0 $$

CAPÍTULO III

MÉTODO

3.1. Tipo de investigación

La investigación de este informe de tesis titulado generalización de la integral y la derivada de orden ordinario a orden fraccionario para la didáctica universitaria utilizando un operador de integración y derivación, fue de tipo no experimental descriptivo, que haciendo uso del método axiomático llevará a la búsqueda de nuevos conocimientos en la matemática universitaria.

3.2. Diseño de la investigación

El diseño de investigación es descriptivo, pues según Rosen (2012) señala que las pruebas en matemáticas son argumentos válidos que establecen la verdad de las afirmaciones matemáticas. Por argumento, nos referimos a una sucesión de afirmaciones que terminan con una conclusión. Por válido, queremos decir que la conclusión, o declaración final del argumento, debe seguirse de la verdad de las declaraciones anteriores, o premisas, del argumento. Es decir, un argumento es válido si y solo si es imposible que todas las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa. Para deducir nuevas declaraciones de declaraciones que ya tenemos, usamos reglas de inferencia que son plantillas para construir argumentos válidos. Las reglas de inferencia son nuestras herramientas básicas para establecer la verdad de las afirmaciones. La tautología $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ es la base de la regla de inferencia llamada modus ponens, o la ley del desapego. (Modus ponens es el latín para el modo que afirma). Esta tautología conduce a la siguiente forma de argumento válido, (donde, el símbolo ∴ denota "por lo tanto"):

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{p \rightarrow q} \\ \therefore q \end{array}$$

3.2.1. Método de estudio

Se empleó en el desarrollo de la investigación el método axiomático que es la base de la construcción de cualquier disciplina matemática, estableciéndose un conjunto de reglas de razonamiento, enunciados y postulados a partir de los cuales por reglas de inferencia del sistema axiomático se derivan otros enunciados o proposiciones que se denominan teoremas.

3.2.1.1. Procedimiento del método axiomático

Hipótesis: Es una presuposición que partiendo de premisas infiere una consecuencia sobre la existencia de un objeto o de una causa de un fenómeno.

Tesis: Es la elaboración de una concepción científica de la práctica y por ello requiere ser demostrada.

3.3. Población y muestra

3.3.1. Población en las ciencias formales

La población N está representada por el operador de integración y el operador de derivación en el sentido ordinario y fraccionario de funciones reales de variable real, clasificadas en la tabla 3

Tabla 3
Población

Operador de integración	Operador de derivación	Total N
10	9	19

Fuente: Elaboración propia

3.3.2. Población en las ciencias sociales

Estudiantes del primer año de la escuela de Física de la Facultad de Ciencias de la UNJBG la cual estuvo comprendida por cincuenta estudiantes.

3.3.3. Muestra

Según Hernández (2010) señala que en las muestras no probabilísticas, la elección de los elementos no depende de la probabilidad, sino de causas relacionadas con las caracteristicas de la investigación o de quien hace la muestra. Aquí el procedimiento no es mecánico ni con base en fórmulas de probabilidad, sino que depende del proceso de toma de decisiones de un investigador o de un grupo de investigadores y, desde luego, las muestras seleccionadas obedecen a otros criterios de investigación (…). La única ventaja de una muestra no probabilística -desde la vision cuantitativa- es su utilidad para determinado diseño de estudio que requiere no tanto una “representatividad” de elementos de una población, sino una cuidadosa y controlada elección de casos con ciertas caracteristicas especificadas previamente en el planteamiento del problema. En ese sentido se considera la muestra igual a la población.

3.4. Técnicas e instrumentos para recolección de datos

3.4.1. Técnicas

a) Procedimiento: Observación

Acciones: Se eligió un conjunto de proposiciones del cálculo fraccionario para luego ser planteados en busca de una solución.

b) Procedimiento: Experimentación

Acciones: Se analizó las proposiciones matemáticas de la teoría del cálculo fraccionario. Asimismo, se evaluaron las proposiciones claramente en función de la teoría dada.

c) Procedimientos: Inducción

Acciones: Se fijaron las reglas de deducción y de la definición de la teoría del cálculo fraccionario. Asimismo, se pasa de una proposición a otras y se introduce nuevos términos y proposiciones.

d) Procedimientos: Analogías

Acciones: Se compararon las proposiciones previas con las nuevas.

e) Procedimientos: Generalización

Acciones: Se generalizó algunas proposiciones, teoremas, en base a las reglas de deducción y definición.

(Guardales, 2004)

3.4.2. Instrumentos

Teoría axiomática

Definición: Es una determinación lógica que establece los signos diferenciales de un objeto, concepto o contenido.

Teorema: Son propiedades que se deducen de los axiomas anexados al sistema axiomático, cuyas leyes son demostrables.

Corolario: Son propiedades que se deducen de un teorema.

Lema: Es una proposición que se deducen de los axiomas anexados al sistema axiomático cuyas leyes son demostrables.

Proposición: Es un enunciado que debe ser verdadero o falso pero que no pueda ser ambas a la vez.

(Guardales ,2004)

3.5. Técnicas de procesamiento y análisis de datos

En matemáticas partiendo de ciertas hipótesis se formulan tesis y luego se demuestran, los llamados teoremas y toman forma $A \to B,$ donde A es la hipótesis o premisa y B es la tesis o conclusión.

Se entiende por demostración del enunciado B a una cadena de transformaciones ejecutadas en virtud de reglas lógicamente validas, que partiendo de un enunciado verdadero A o suponiéndolo verdadero se concluye B.

a) Demostración Directa

En la demostración directa se parte de un enunciado verdadero A y de ahí se concluye en el enunciado B. La conclusión B es también verdadera, ya que de una premisa verdadera solo se puede seguir un enunciado verdadero.

b) Demostración por inducción completa

Esta demostración consiste, en que se demuestra que el enunciado se cumple para un número natural inicial. Se acepta que se cumple para un numero *k*. Luego se muestra que se cumple para $k+1.$ Se concluye que el enunciado se cumple para todos los números naturales.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

4.1. Presentación de resultados por variables

4.1.1. Integración fraccionaria

4.1.1.1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y f una función integrable en $L_1[a;b]$. Entonces $\forall\ x \in [a;b]$

$$ {}_aI_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds $$

4.1.1.2. Sea f una función integrable en $[a;b]$. Luego, para $a \le x \le b$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tenemos

(a) ${}_aI_x^{\alpha} \lambda f(x) = \lambda\, {}_aI_x^{\alpha} f(x)$

(b) ${}_aI_x^{\alpha}(f(x)+g(x)) = {}_aI_x^{\alpha} f(x) + {}_aI_x^{\alpha} g(x)$

(c) Sea α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}^+$ y $f \in L_1[a,b]$. Entonces

$$ {}_aI_x^{\alpha_1}\, {}_aI_x^{\alpha_2} f(x) = {}_aI_x^{\alpha_2}\, {}_aI_x^{\alpha_1} f(x) = {}_aI_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) $$

, se cumple casi para todo $x \in [a,b]$.

4.1.1.3. Si $f(x) = (x-a)^{\beta}$, $\beta > 0,\ x > a,\ \alpha > 0$ entonces

$$ {}_aI_x^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta} $$

4.1.1.4. Si $f(x) = \ln(x-a)$ tal que $x > a,\ \alpha > 0$ entonces

$$ {}_aI_x^{\alpha} \ln(x-a) = \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}[\ln(x-a) - \gamma - \psi(\alpha+1)] $$

4.1.2. Derivación fraccionaria

4.1.2.1. Sean $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$ y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > \alpha$. Entonces

$$ {}_aD_x^{\alpha} f(x) = D^m \, {}_aI_x^{m-\alpha} f(x) $$

4.1.2.2. Si $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$, entonces

(a) ${}_aD_x^{\alpha} \lambda f(x) = \lambda \, {}_aD_x^{\alpha} f(x) \quad \forall \, \lambda \in \mathbb{R}$

(b) ${}_aD_x^{\alpha}(f+g)(x) = {}_aD_x^{\alpha} f(x) + {}_aD_x^{\alpha} g(x)$

(c) Supongamos que $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$. Por otra parte sea $\phi \in L_1[a,b]$ y $f = {}_aI_x^{\alpha_1+\alpha_2}\phi$.

Entonces

$$ {}_aD_x^{\alpha_1} \, {}_aD_x^{\alpha_2} f(x) = {}_aD_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) $$

4.1.2.3. Si $f(x) = (x-a)^m$ es una función, entonces se cumple:

(a) $D^n (x-a)^m = \dfrac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}(x-a)^{m-n} \; ; \; m, n \in \mathbb{Z}^{+}$ y $m \geq n$

(b) ${}_aD_x^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}$, $\beta > -1$ y $\alpha > 0$

4.1.2.4. Si $f(x) = x^m$ es una función, entonces se cumple:

(a) $D^n x^m = \dfrac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \; ; \; m, n \in \mathbb{Z}^{+}$ y $m \geq n$

(b) $D^{\alpha} x^{\beta} = \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha} \; ; \; \beta, \alpha \in \mathbb{R}^{+}$ y $\beta > \alpha$

4.1.2.5. Si f es una función tal que $f(x) = \ln(x-a),\ x > a$ Entonces,

$$ {}_aD_x^{\alpha} \ln(x-a) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\ln(x-a) - \gamma - \psi(1-\alpha)\right] $$

4.1.3. Problemática de la asignatura de matemáticas en la UNJBG

Cincuenta estudiantes del primer año de la escuela de Física de la Facultad de Ciencias de la UNJBG participaron en un pretest y postest preparado para evaluar la efectividad de la didáctica universitaria de un operador de integración y derivación de orden fraccionario. Cada alumno desarrolló un cuestionario con preguntas del cálculo diferencial e integral fraccionario y después resolvió un cuestionario con la didáctica universitaria del docente. ¿Proporcionan estos datos suficientes evidencias para indicar que la didáctica universitaria es efectiva a un nivel de una significancia del 0,05?

4.2. Contrastación de hipótesis

Para contrastar la hipótesis matemática se empleó en el desarrollo de la investigación el método axiomático que es la base de la construcción de cualquier disciplina matemática, estableciéndose un conjunto de reglas de razonamiento, de enunciados, postulados a partir de los cuales y por reglas de inferencia del sistema se derivan otros enunciados o proposiciones que llamaremos teoremas.

En cuanto a la contrastación de la hipótesis estadística se realizó un análisis exploratorio de los datos y la determinación de las medidas descriptivas de las variables antes y después de participar en la didáctica universitaria. Así mismo, se verificó los supuestos de la normalidad de los dos grupos utilizando la prueba de normalidad de Kolgomorov-Smimov y Shapiro-Wilk. Finalmente, como no se cumple con el supuesto de normalidad entonces se compararon los dos grupos utilizando una prueba estadística no paramétrica.

4.3. Discusión de Resultados

4.3.1. Integración de orden fraccionario

4.3.1.1. Operador de integración de orden entero

La idea básica detrás de cálculo fraccionario está íntimamente relacionada con el teorema 2.1 (primer teorema fundamental del cálculo). Por lo tanto tenemos una relación muy estrecha entre los operadores diferenciales y operadores integrales. Es uno de los objetivos del cálculo fraccionario mantener esta relación en un sentido adecuadamente generalizado. De ahí que también hay una necesidad de hacer frente a los operadores integrales fraccionarios, y en realidad resulta ser útil discutir estos primeros antes de llegar a los operadores diferenciales fraccionarios.

La pregunta clave ahora es: ¿Cómo podemos extender los conceptos de la definición 2.2 (c) a $n \notin \mathbb{N}$? Una vez que hayamos proporcionado una extensión tal, entonces tenemos que pedir las proposiciones de los operadores, como una consecuencia.

A continuación daremos una generalización de la definición 2.2(c) para $n \notin \mathbb{N}$. Comenzamos con el operador integral ${}_aI_x^n$. En el caso $n \in \mathbb{N}$, es bien sabido que podemos reemplazar la definición recursiva del lema 2.1 por la siguiente proposición explícita.

Proposición 4.1. Sea f una función integrable de Riemann en $[a,b]$. Luego, para $a \leq x \leq b$ y $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$, tenemos

$$ {}_{a}I_{x}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{(\alpha-1)!}\int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \qquad \textbf{(4.1)} $$

Demostración

Antes debemos recordar que una integral iterada es una integral evaluada múltiples veces sobre una misma variable, en contraste con una integral múltiple, que consiste en un número de integrales evaluada con respecto a diferentes variables.

Consideremos una integral definida con un límite de integración inferior arbitrario igual a cero, es decir $a=0$.

$$ {}_{0}I_{x}^{1} f(x) = \int_{0}^{x} f(t)\, dt \qquad \textbf{(4.2)} $$

Para dos integrales se tiene:

$$ {}_{0}I_{x}^{2} f(x) = \int_{0}^{x}\int_{0}^{x_1} f(t)\, dt\, dx_1 \qquad \textbf{(4.3)} $$

Por el teorema 2.3 (Fubini), podemos intercambiar el orden de integración en la integral doble (4.3). Como se ha supuesto $a=0$, entonces el dominio de integración se ilustra en la figura 1 (a). Cambiando el orden de integración como se muestra en la figura 1 (b), se tiene

$$ {}_{0}I_{x}^{2} f(x) = \int_{0}^{x}\int_{t}^{x} f(t)\, dx_1\, dt $$

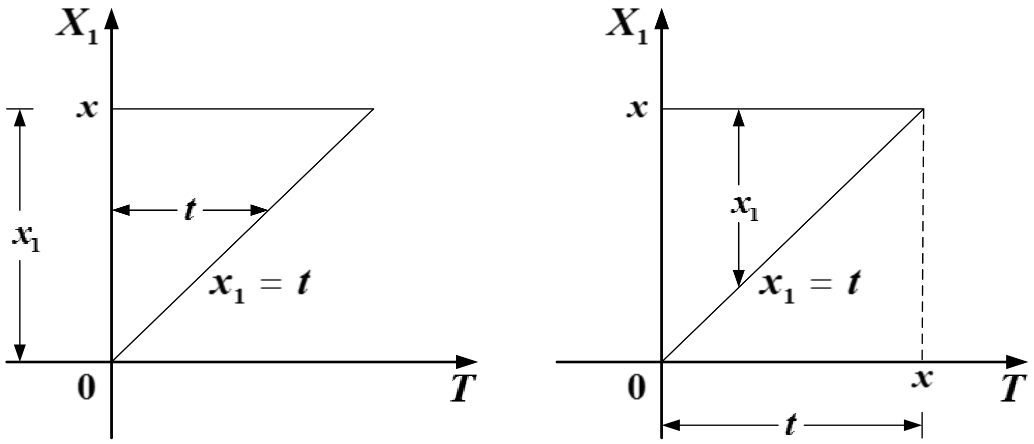
$$ {}_{0}I_{x}^{2} f(x) = \int_{0}^{x} f(t)\int_{t}^{x} dx_1\, dt $$

$$ {}_{0}I_{x}^{2} f(x) = \int_{0}^{x} f(t)\big[x_1\big]_{t}^{x} dt $$

$$ {}_{0}I_{x}^{2} f(x) = \int_{0}^{x} f(t)\big[x-t\big] dt \qquad \textbf{(4.4)} $$

Ahora consideremos tres integrales

$$ {}_0I_x^3 f(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} f(t)\,dt\,dx_2 dx_1 \qquad \textbf{(4.5)} $$



$\mathbf{0 \le x_1 \le x,\ 0 \le t \le x_1}$ $\qquad$ $\mathbf{0 \le t \le x,\ t \le x_1 \le x}$

(a) $\boldsymbol{{}_0I_x^2 f(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} f(t)\,dt\,dx_1}$ $\qquad$ **(b)** $\boldsymbol{{}_0I_x^2 f(x) = \int_0^x \int_t^x f(t)\,dx_1\,dt}$

Figura 1. Dominios de integración $\mathbf{0 \le x_1 \le x,\ 0 \le t \le x_1}$; $\mathbf{0 \le t \le x,\ t \le x_1 \le x}$
Fuente: Elaboración propia

donde el dominio de integración para 2 integrales se ilustra en la figura 2 (a). Cambiando el orden de integración como se muestra en la figura 2 (b), se obtiene:

$$ {}_0I_x^3 f(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} \int_t^{x_1} f(t)\,dx_2\,dt\,dx_1 $$

$$ {}_0I_x^3 f(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} f(t) \int_t^{x_1} dx_2\,dt\,dx_1 $$

$$ {}_0I_x^3 f(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} f(t) \left[x_2\right]_t^{x_1} dt\,dx_1 $$

$$ {}_0I_x^3 f(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} f(t) \left[x_1 - t\right] dt\,dx_1 \qquad \textbf{(4.6)} $$

donde el dominio de integración de (4.6) se ilustra en la figura 1 (a). Cambiando el orden de integración como se muestra en la figura 1 (b), se tiene:

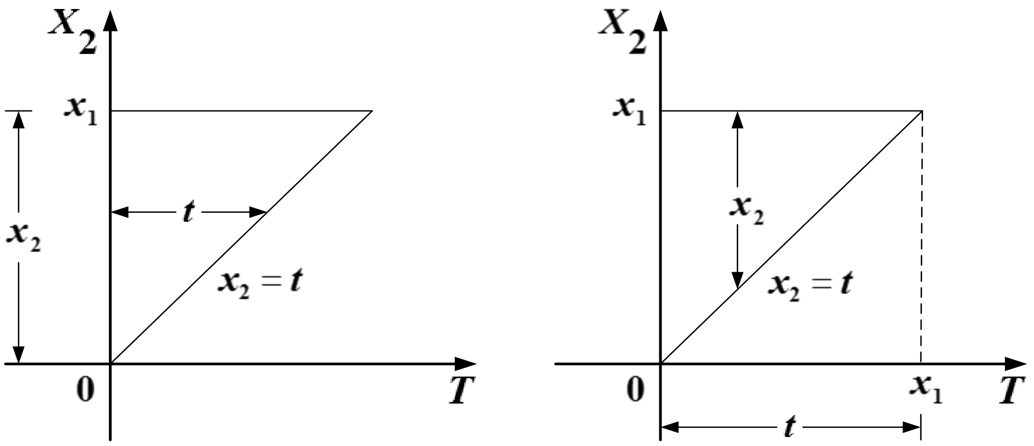
$$ {}_0I_x^3 f(x) = \int_0^x \int_t^x f(t) \left[x_1 - t\right] dx_1\,dt $$

$$ {}_0I_x^3 f(x) = \int_0^x f(t) \int_t^x [x_1 - t] dx_1 \, dt $$

$$ {}_0I_x^3 f(x) = \int_0^x f(t) \left[\frac{(x_1 - t)^2}{2} \right]_t^x dt $$

$$ {}_0I_x^3 f(x) = \int_0^x f(t) \left[\frac{(x - t)^2}{2} \right] dt $$

$$ {}_0I_x^3 f(x) = \frac{1}{1 \cdot 2} \int_0^x f(t)[x - t]^2 \, dt \qquad \textbf{(4.7)} $$



$\mathbf{0 \le x_2 \le x_1,\ 0 \le t \le x_2}$ $\qquad$ $\mathbf{0 \le t \le x_1,\ t \le x_2 \le x_1}$

(a) $\int_0^{x_1} \int_0^{x_2} f(t) \, dt \, dx_2$ $\qquad$ **(b)** $\int_0^{x_1} \int_t^{x_1} f(t) \, dx_2 \, dt$

Figura 2. Dominios de integración $\mathbf{0 \le x_2 \le x_1,\ 0 \le t \le x_2;\quad 0 \le t \le x_1,\ t \le x_2 \le x_1}$
Fuente: Elaboración propia

De lo anterior se deduce que para 4 integrales se obtiene

$$ {}_0I_x^4 f(x) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \int_0^x f(t)[x - t]^3 \, dt $$

y para *n* integrales

$$ {}_0I_x^n f(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_{n-1}} f(t) \, dt \, dx_{n-1} \, dx_{n-2} \dots dx_2 \, dx_1 $$

se deduce que

$$ {}_0I_x^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t)[x - t]^{n-1} dt, \quad n \in \mathbb{N} $$

usando el teorema 2.6 (b) ($\Gamma(n)=(n-1)!$), para eliminar la naturaleza discreta del factorial, se tiene

$$ {}_0I_x^n f(x)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^x f(t)[x-t]^{n-1}dt,\ n\in\mathbb{N} \tag{4.8}$$

una generalización del operador de integración fraccionaria (4.8) se obtiene para $n=\alpha\in\mathbb{R}^+$.

$$ {}_0I_x^\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x f(t)[x-t]^{\alpha-1}dt,\quad \alpha>0$$

Si $\alpha=n$ donde $n\in\mathbb{Z}_0^+$ se tiene la *n*-ésima integral iterada. Además como el límite inferior de la integral es arbitrario entonces se tiene

$$ {}_aI_x^\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f(t)[x-t]^{\alpha-1}dt,\quad \alpha>0$$

4.3.1.2. Operador de integración de orden fraccionario

En vista de la proposición 4.1, la siguiente definición parece más bien natural.

Definición 4.1. Sea $\alpha\in\mathbb{R}^+$. El operador ${}_aI_x^\alpha$, definido en $L_1[a,b]$ por

$$ {}_aI_x^\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}f(s)ds \tag{4.9}$$

para $a\le x\le b,$ se llama el operador integral fraccionario de orden α.

Observación 4.1.

1. Para $\alpha=0,$ en (4.9), denotamos el operador identidad ${}_aI_x^0=I$. La definición para $\alpha=0$ es muy conveniente para las manipulaciones futuras.
2. Es evidente que la integral fraccionaria coincide con la definición clásica de ${}_aI_x^n$ en el caso que $n\in\mathbb{N},$ excepto por el hecho de que hemos extendido el dominio

desde funciones integrables de Riemann a funciones integrables de Lebesgue (que nos conduzcan a cualquier problema en nuestro desarrollo).

3. Además, en el caso $\alpha \geq 1$ es evidente que la integral ${}_aI_x^n f(x)$ existe para cada $x \in [a;b]$, porque el integrando es el producto de una función *f* integrable y la función $(x-t)^{\alpha-1}$ es continua.

4. Sin embargo en el caso $0 < \alpha < 1$, la situación es menos clara a primera vista pero sin embargo el operador integral fraccionario (4.9) es impropia y converge. Esto ocurre debido a que cuando $s \to x$, se tiene $(x-s)^{\alpha-1} \to 0$.

5. Si $\alpha < 0$, la integral fraccionaria (4.9) diverge, dado que la función Gamma presenta discontinuidades en el eje negativo.

Ejemplo 4.1. Use la definición 4.1 para calcular la integral fraccionaria de orden $\alpha = 1/2$, para la función $f(x) = 1$.

Solución

Por definición 4.1 (Integral fraccionaria) se tiene

$$ {}_aI_x^{1/2} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_a^x (x-s)^{1/2-1} f(s)\,ds $$

$$ {}_aI_x^{1/2}(1) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_a^x (x-s)^{-1/2}(1)\,ds \qquad \textbf{(4.10)} $$

Haciendo cambio de variable:

$$ u = x - s $$

$$ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} s = x-u \\ Si\ s \to x \ \Rightarrow \ u \to 0 \\ Si\ s \to a \ \Rightarrow \ u \to x-a \\ ds = -du \end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.11)} $$

Reemplazando **(4.11)** en **(4.10)** y usando la tabla 1 se obtiene

$$_{a}I_{x}^{1/2}(1)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{x-a}^{0}u^{-1/2}(-du)$$

$$_{a}I_{x}^{1/2}(1)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x-a}u^{-1/2}du$$

$$_{a}I_{x}^{1/2}(1)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[2u^{1/2}\right]_{0}^{x-a}$$

$$_{a}I_{x}^{1/2}(1)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(x-a)^{1/2} \qquad \blacksquare$$

El símbolo $\blacksquare$ indica la culminación de la solución de un ejemplo o de la demostración de una proposición

Ejemplo 4.2. Use la definición 4.1 para calcular la integral fraccionaria de orden $\alpha=3/2$, $a=0$ para la función $f(x)=x^{2}$.

Solución

Por definición 4.1 (Integral fraccionaria) se tiene

$$_{0}I_{x}^{3/2}f(x)=\frac{1}{\Gamma(3/2)}\int_{0}^{x}(x-s)^{3/2-1}f(s)\,ds$$

$$_{0}I_{x}^{3/2}(x^{2})=\frac{1}{\Gamma(3/2)}\int_{0}^{x}(x-s)^{1/2}s^{2}\,ds \qquad \textbf{(4.12)}$$

Haciendo cambio de variable:

$$s=t\,x \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} Si\ s\to x\ \Rightarrow\ t\to 1 \\ Si\ s\to 0\ \Rightarrow\ t\to 0 \\ ds=x\,dt \end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.13)}$$

Reemplazando **(4.13)** en **(4.12)** se obtiene

$$ {}_0I_x^{3/2}(x^2) = \frac{1}{\Gamma(3/2)}\int_0^1 (x-tx)^{1/2}(tx)^2 x\,dt $$

$$ {}_0I_x^{3/2}(x^2) = \frac{x^{7/2}}{\Gamma(3/2)}\int_0^1 (1-t)^{1/2}t^2\,dt $$

$$ {}_0I_x^{3/2}(x^2) = \frac{x^{7/2}}{\Gamma(3/2)}\int_0^1 (1-t)^{3/2-1}t^{3-1}\,dt $$

por la definición 2.6 (Función beta) y el teorema 2.7 (Función beta) se obtiene

$$ {}_0I_x^{3/2}(x^2) = \frac{x^{7/2}}{\Gamma(3/2)}B\left(\frac{3}{2},3\right) $$

$$ {}_0I_x^{3/2}(x^2) = \frac{x^{7/2}}{\Gamma(3/2)}\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(3)}{\Gamma(3/2+3)} $$

luego aplicando el teorema 2.6 (función gamma) y la tabla 1 se obtiene

$$ {}_0I_x^{3/2}(x^2) = \frac{64}{105\sqrt{\pi}}x^{7/2} \qquad \blacksquare $$

Ejemplo 4.3. Use la definición 4.1 para calcular la integral fraccionaria de orden $\alpha = 1/3$, $a = 4$ para la función $f(x) = (x-4)^{1/2}$.

Solución

Por definición 4.1 de la integral de orden fraccionario se tiene

$$ {}_4I_x^{1/3}(x-4)^{1/2} = \frac{1}{\Gamma(1/3)}\int_4^x (x-s)^{1/3-1}(s-4)^{1/2}\,ds \tag{4.14} $$

Con la sustitución $s = 4 + t(x-4)$ de donde se tiene:

$$ \left.\begin{aligned} & s-4 = t(x-4) \\ & x-s = (x-4)(1-t) \\ & Si\ s \to x \ \Rightarrow\ t \to 1 \\ & Si\ s \to 4 \ \Rightarrow\ t \to 0 \\ & ds = (x-4)dt \end{aligned}\right\} \tag{4.15} $$

Reemplazando **(4.15)** en **(4.14)** se tiene

$$ {}_4I_x^{1/3}(x-4)^{1/2} = \frac{1}{\Gamma(1/3)}\int_0^1 [(x-4)(1-t)]^{1/3-1}[t(x-4)]^{1/2}\ (x-4)dt $$

$$ {}_4I_x^{1/3}(x-4)^{1/2} = \frac{1}{\Gamma(1/3)}\int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{-2/3}(x-4)^{-2/3}(x-4)^{1/2}(x-4)\ dt $$

$$ {}_4I_x^{1/3}(x-4)^{1/2} = \frac{(x-4)^{5/6}}{\Gamma(1/3)}\int_0^1 t^{3/2-1}(1-t)^{1/3-1}\,dt $$

Luego por la definición 2.6 (Función beta) se obtiene

$$ {}_4I_x^{1/3}(x-4)^{1/2} = \frac{(x-4)^{5/6}}{\Gamma(1/3)}B(3/2,1/3) $$

Teniendo en cuenta el teorema 2.7 (Función beta), el teorema 2.6 (Función gamma) y la tabla 1 se obtiene

$$ {}_4I_x^{1/3}(x-4)^{1/2} = \frac{(x-4)^{5/6}}{\Gamma(1/3)}\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1/3)}{\Gamma(3/2+1/3)} $$

$$ {}_4I_x^{1/3}(x-4)^{1/2} = (x-4)^{5/6}\ \frac{(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(11/6)} $$

$$ {}_4I_x^{1/3}(x-4)^{1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(11/6)}(x-4)^{5/6} $$

$$ {}_4I_x^{1/3}(x-4)^{1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2(0,9407...)}(x-4)^{5/6} \qquad \blacksquare $$

4.3.1.3. Proposiciones del operador de integración de orden fraccionario

Proposición 4.2. (Semigrupo o ley de exponentes)

Sea α, $\beta \in \mathbb{R}^+$ y $f \in L_1[a,b]$. Entonces,

$$ {}_aI_x^{\alpha}\ {}_aI_x^{\beta} f(x) = {}_aI_x^{\alpha+\beta} f(x) \tag{4.16} $$

se cumple casi en todas partes de $[a,b]$.

Demostración

Por definición 4.1

$$ {}_aI_x^{\alpha}\,{}_aI_x^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}\,{}_aI_s^{\beta} f(s)\,ds $$

$$ {}_aI_x^{\alpha}\,{}_aI_x^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^s (s-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\,d\tau\,ds $$

$$ {}_aI_x^{\alpha}\,{}_aI_x^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\int_a^s (x-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\,d\tau\,ds $$

Por el teorema 2.3 (Fubini) podemos intercambiar el orden de integración en la integral doble $\left(\int_a^x\int_a^s (x-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1} f(\tau)d\tau\,ds\right)$. Supongamos que $a=0$, entonces el dominio de integración se ilustra en la figura 3 (a). Cambiando el orden de integración como se muestra en la figura 3 (b), se obtiene

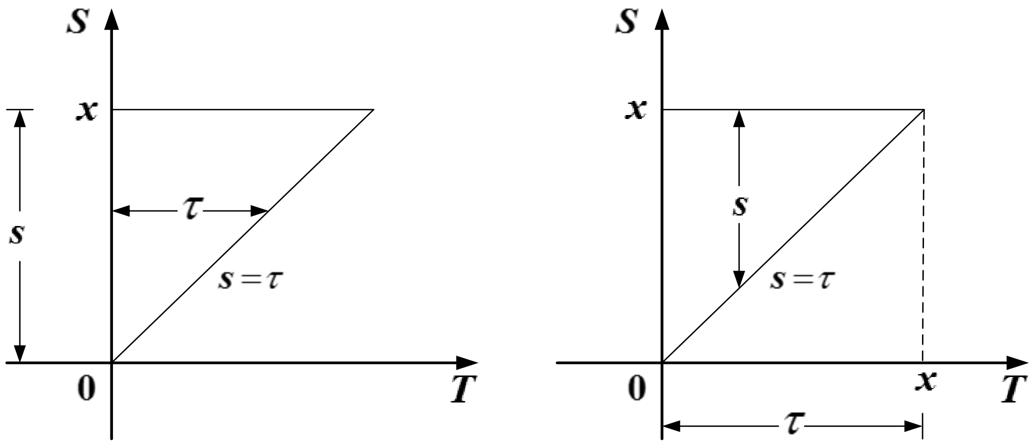
$$ {}_aI_x^{\alpha}\,{}_aI_x^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\int_\tau^x (x-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\,ds\,d\tau $$

$$ {}_aI_x^{\alpha}\,{}_aI_x^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(\tau)\int_\tau^x (x-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1}\,ds\,d\tau \qquad \textbf{(4.17)} $$

Con la sustitución $s=\tau+t(x-\tau)$ de donde se tiene:

$$ \left.\begin{array}{l} s-\tau = t(x-\tau) \\ x-s = (x-\tau)(1-t) \\ Si\ s\to x \ \Rightarrow\ t\to 1 \\ Si\ s\to \tau \ \Rightarrow\ t\to 0 \\ ds = (x-\tau)dt \end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.18)} $$

Reemplazando **(4.18)** en **(4.17)**



$0 \le s \le x,\ 0 \le \tau \le s$ $\qquad$ $\tau \le s \le x,\ 0 \le \tau \le x$

(a) $\int_0^x \int_0^s (x-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\, d\tau\, ds$ $\qquad$ **(b)** $\int_0^x \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\, ds\, d\tau$

Figura 3. Dominios de integración $0 \le s \le x,\ 0 \le \tau \le s$; $\tau \le s \le x,\ 0 \le \tau \le x$
Fuente: Elaboración propia

$$ {}_aI_x^{\alpha}\, {}_aI_x^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau) \int_0^1 \left[(x-\tau)(1-t)\right]^{\alpha-1} \left[t(x-\tau)\right]^{\beta-1} (x-\tau)\, dt\, d\tau $$

$$ {}_aI_x^{\alpha}\, {}_aI_x^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1}\, dt\, d\tau $$

Teniendo en cuenta la definición 2.6 y el teorema 2.7 (a), de la función beta,

$$ B(\alpha,\beta) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} $$

se obtiene

$$ {}_aI_x^{\alpha}\, {}_aI_x^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} d\tau $$

$$ {}_aI_x^{\alpha}\, {}_aI_x^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau $$

$$ {}_aI_x^{\alpha}\, {}_aI_x^{\beta} f(x) = {}_aI_x^{\alpha+\beta} f(x) \qquad \blacksquare $$

Proposición 4.3. Sea $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^+$ y $f \in L_1[a,b]$. Entonces,

$$ {}_aI_x^{\alpha}\, {}_aI_x^{\beta} f(x) = {}_aI_x^{\beta}\, {}_aI_x^{\alpha} f(x) \qquad \textbf{(4.19)} $$

se cumple casi en todas partes de $[a,b]$.

Demostración

Por la proposición 4.2 se tiene: ${}_aI_x^{\alpha}\,{}_aI_x^{\beta}f(x) = {}_aI_x^{\alpha+\beta}f(x)$ pero como $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^+$ entonces

$${}_aI_x^{\alpha}\,{}_aI_x^{\beta}f(x) = {}_aI_x^{\alpha+\beta}f(x) = {}_aI_x^{\beta+\alpha}f(x) = {}_aI_x^{\beta}\,{}_aI_x^{\alpha}f(x) \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4.4. Si $f(x) = x^{1/2}$, $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = 3/2$, calcular

a) ${}_0I_x^{\alpha_1}f(x)$,

b) ${}_0I_x^{\alpha_2}f(x)$,

c) ${}_0I_x^{\alpha_1}\,{}_0I_x^{\alpha_2}f(x)$,

d) ${}_0I_x^{\alpha_2}\,{}_0I_x^{\alpha_1}f(x)$,

e) ${}_0I_x^{\alpha_1+\alpha_2}f(x)$

Solución 4.4.a) ${}_0I_x^{\alpha_1}f(x)$,

$${}_0I_x^{1/2}(x^{1/2}) = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^x (x-s)^{1/2-1}s^{1/2}ds = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^x (x-s)^{-1/2}s^{1/2}ds \qquad \textbf{(4.20)}$$

Haciendo cambio de variable: $s = t\,x \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Si\ s \to x \Rightarrow t \to 1 \\ Si\ s \to 0 \Rightarrow t \to 0 \\ ds = x\,dt \end{array}\right\}$ **(4.21)**

Reemplazando **(4.21)** en **(4.20)** se obtiene

$${}_0I_x^{1/2}(x^{1/2}) = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^1 (x-tx)^{-1/2}(tx)^{1/2}x\,dt = \frac{x}{\Gamma(1/2)}\int_0^1 (1-t)^{1/2-1}t^{3/2-1}dt$$

Luego por la definición 2.6 (Función beta), los teoremas 2.7 (Función beta), 2.6 (Función gamma) y la tabla 1 se obtiene

$$ {}_0I_x^{1/2}(x^{1/2}) = \frac{x}{\Gamma(1/2)} B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{x}{\Gamma(1/2)} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2+3/2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} x \qquad \blacksquare $$

Solución 4.4.b) ${}_0I_x^{\alpha_2} f(x)$

$$ {}_0I_x^{3/2}(x^{1/2}) = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^x (x-s)^{3/2-1} s^{1/2} ds = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^x (x-s)^{1/2} s^{1/2} ds \qquad \textbf{(4.22)} $$

Haciendo cambio de variable: $s = t\,x \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} Si\ s \to x \Rightarrow t \to 1 \\ Si\ s \to 0 \Rightarrow t \to 0 \\ ds = x dt \end{array}\right\}$ **(4.23)**

Reemplazando **(4.23)** en **(4.22)** se obtiene

$$ {}_0I_x^{3/2}(x^{1/2}) = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^1 (x-tx)^{1/2} (tx)^{1/2} x dt = \frac{x^2}{\Gamma(3/2)} \int_0^1 (1-t)^{3/2-1} t^{3/2-1} dt $$

Luego por la definición 2.6 (Función beta), los teoremas 2.7 (Función beta), 2.6 (Función gamma) y la tabla 1 se obtiene

$$ {}_0I_x^{3/2}(x^{1/2}) = \frac{x^2}{\Gamma(3/2)} B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{x^2}{\Gamma(3/2)} \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/2+3/2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} x^2 \qquad \blacksquare $$

Solución 4.4.c) ${}_0I_x^{\alpha_1}\,{}_0I_x^{\alpha_2} f(x)$

$$ {}_0I_x^{1/2}\,{}_0I_x^{3/2}(x^{1/2}) = {}_0I_x^{1/2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4} x^2\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,{}_0I_x^{1/2}(x^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\Gamma(1/2)} \int_0^x (x-s)^{1/2-1} s^2 ds \qquad \textbf{(4.24)} $$

Haciendo cambio de variable: $s = t\,x \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Si\ s \to x \Rightarrow t \to 1 \\ Si\ s \to 0 \Rightarrow t \to 0 \\ ds = x dt \end{array}\right\}$ **(4.25)**

Reemplazando **(4.25)** en **(4.24)** se obtiene

$$ {}_0I_x^{1/2}\,{}_0I_x^{3/2}(x^{1/2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\Gamma(1/2)} \int_0^1 (x-tx)^{-1/2} (tx)^2 x dt = \frac{\sqrt{\pi}\, x^{5/2}}{4\Gamma(1/2)} \int_0^1 (1-t)^{1/2-1} t^{3-1} dt $$

Luego por la definición 2.4 (Función beta), los teoremas 2.7 (Función beta), 2.6 (Función gamma) y la tabla 1 se obtiene

$$ {}_0I_x^{1/2}\,{}_0I_x^{3/2}(x^{1/2}) = \frac{\sqrt{\pi}\,x^{5/2}}{4\Gamma(1/2)}B\left(\frac{1}{2},3\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,x^{5/2}}{4\Gamma(1/2)}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(3)}{\Gamma(1/2+3)} = \frac{4}{15}x^{5/2} \qquad \blacksquare $$

Solución 4.4.d) ${}_0I_x^{\alpha_2}\,{}_0I_x^{\alpha_1} f(x)$

$$ {}_0I_x^{3/2}\,{}_0I_x^{1/2}(x^{1/2}) = {}_0I_x^{3/2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}x\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,{}_0I_x^{3/2}(x) $$

$$ {}_0I_x^{3/2}\,{}_0I_x^{1/2}(x^{1/2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\Gamma(3/2)}\int_0^x (x-s)^{3/2-1}s\,ds \tag{4.26} $$

Haciendo cambio de variable: $s = t\,x \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Si\ s \to x \Rightarrow t \to 1 \\ Si\ s \to 0 \Rightarrow t \to 0 \\ ds = x\,dt \end{array}\right\}$ **(4.27)**

Reemplazando **(4.27)** en **(4.26)** se obtiene

$$ {}_0I_x^{3/2}\,{}_0I_x^{1/2}(x^{1/2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(3/2)}\int_0^1 (x-tx)^{1/2}(tx)x\,dt = \frac{\sqrt{\pi}\,x^{5/2}}{2\Gamma(3/2)}\int_0^1 (1-t)^{3/2-1}t^{2-1}dt $$

Luego por la definición 2.6 (Función beta), los teoremas 2.7 (Función beta), 2.6 (Función gamma) y la tabla 1 se obtiene

$$ {}_0I_x^{3/2}\,{}_0I_x^{1/2}(x^{1/2}) = \frac{\sqrt{\pi}\,x^{5/2}}{2\Gamma(3/2)}B\left(\frac{3}{2},2\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,x^{5/2}}{2\Gamma(3/2)}\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(2)}{\Gamma(3/2+2)} = \frac{4}{15}x^{5/2} \qquad \blacksquare $$

Solución 4.4.e) ${}_0I_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x)$

$$ {}_0I_x^{1/2+3/2}(x^{1/2}) = {}_0I_x^{2}\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{\Gamma(2)}\int_0^x (x-s)^{2-1}s^{1/2}ds = \int_0^x (x-s)s^{1/2}ds \tag{4.28} $$

Haciendo cambio de variable: $s = t\,x$

$$ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Si\ s \to x \Rightarrow t \to 1 \\ Si\ s \to 0 \Rightarrow t \to 0 \\ ds = x\,dt \end{array}\right\} \tag{4.29} $$

Reemplazando **(4.29)** en **(4.28)** se obtiene

$${}_0I_x^{1/2+3/2}(x^{1/2}) = {}_0I_x^2(x^{1/2}) = \int_0^1 (x-tx)(tx)^{1/2}\,x\,dt = x^{5/2}\int_0^1 (1-t)^{2-1}t^{3/2-1}dt$$

Luego por la definición 2.6 (Función beta), los teoremas 2.7 (Función beta), 2.6 (Función gamma) y la tabla 1 se obtiene

$${}_0I_x^{1/2+3/2}(x^{1/2}) = {}_0I_x^2(x^{1/2}) = x^{5/2}B\left(2,\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(2+3/2)}x^{5/2} = \frac{4}{15}x^{5/2} \qquad \blacksquare$$

Observación 4.2.

Del ejemplo 4.4 se obtuvo:

$${}_0I_x^{\alpha_1}\,{}_0I_x^{\alpha_2} f(x) = {}_0I_x^{\alpha_2}\,{}_0I_x^{\alpha_1} f(x) = {}_0I_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x)$$

Este resultado corrobora las proposiciones 4.2 y 4.3.

Ejemplo 4.5. Si $f(x) = x^{-1/2}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$, calcular

a) ${}_0I_x^{\alpha_1} f(x)$,

b) ${}_0I_x^{\alpha_2} f(x)$,

c) ${}_0I_x^{\alpha_1}\,{}_0I_x^{\alpha_2} f(x)$,

d) ${}_0I_x^{\alpha_2}\,{}_0I_x^{\alpha_1} f(x)$,

e) ${}_0I_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x)$

Solución 4.5.a) ${}_0I_x^{\alpha_1} f(x)$,

$${}_0I_x^{1/2}(x^{-1/2}) = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^x (x-s)^{1/2-1}s^{-1/2}ds = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^x (x-s)^{-1/2}s^{-1/2}ds \qquad \textbf{(4.30)}$$

Haciendo cambio de variable:

$$s = t\,x$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} Si\ s \to x \Rightarrow t \to 1 \\ Si\ s \to 0 \Rightarrow t \to 0 \\ ds = xdt \end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.31)}$$

Reemplazando **(4.31)** en **(4.30)** se obtiene

$${}_0I_x^{1/2}(x^{-1/2}) = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^1 (x-tx)^{-1/2}(tx)^{-1/2}xdt = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^1 (1-t)^{1/2-1}t^{1/2-1}dt$$

Luego por la definición 2.6 (Función beta), los teoremas 2.7 (Función beta), 2.6 (Función gamma) y la tabla 1 se obtiene

$${}_0I_x^{1/2}(x^{-1/2}) = \frac{1}{\Gamma(1/2)}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2+1/2)} = \sqrt{\pi} \qquad \blacksquare$$

Solución 4.5.b) ${}_0I_x^{\alpha_2} f(x)$

La solución es igual que **4.5.a)**, es decir

$${}_0I_x^{\alpha_2} f(x) = {}_0I_x^{\alpha_1} f(x) = {}_0I_x^{1/2}(x^{-1/2}) = \sqrt{\pi} \qquad \blacksquare$$

Solución 4.5.c) ${}_0I_x^{\alpha_1}\,{}_0I_x^{\alpha_2} f(x)$

$${}_0I_x^{1/2}\,{}_0I_x^{1/2}(x^{-1/2}) = {}_0I_x^{1/2}\left(\sqrt{\pi}\right)$$

$${}_0I_x^{1/2}\,{}_0I_x^{1/2}(x^{-1/2}) = \sqrt{\pi}\,\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^x (x-s)^{1/2-1}ds = \int_0^x (x-s)^{-1/2}ds \qquad \textbf{(4.32)}$$

Integrando **(4.32)** se obtiene

$${}_0I_x^{1/2}\,{}_0I_x^{1/2}(x^{-1/2}) = -\int_0^x (x-s)^{-1/2}(-ds) = -\left[2(x-s)^{1/2}\right]_0^x = 2x^{1/2} \qquad \blacksquare$$

Solución 4.5.d) ${}_0I_x^{\alpha_2}\,{}_0I_x^{\alpha_1} f(x)$

Similar a la parte **4.5.c),** se obtiene ${}_0I_x^{\alpha_2}\,{}_0I_x^{\alpha_1} f(x) = {}_0I_x^{1/2}\,{}_0I_x^{1/2}(x^{-1/2}) = 2x^{1/2}$ ■

Solución 4.5.e) ${}_0I_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x)$

$${}_0I_x^{1/2+1/2}(x^{-1/2}) = {}_0I_x^1\left(x^{-1/2}\right) = \frac{1}{\Gamma(1)}\int_0^x (x-s)^{1-1} s^{-1/2} ds = \int_0^x s^{-1/2} ds \quad \textbf{(4.33)}$$

Integrando **(4.33)** se obtiene

$${}_0I_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) = {}_0I_x^{1/2+1/2}(x^{-1/2}) = \left(2s^{1/2}\right)_0^x = 2x^{1/2} \quad \blacksquare$$

Observación 4.3.

Del ejemplo 4.5 se obtuvo:

$${}_0I_x^{\alpha_1}\,{}_0I_x^{\alpha_2} f(x) = {}_0I_x^{\alpha_2}\,{}_0I_x^{\alpha_1} f(x) = {}_0I_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x)$$

Este resultado corrobora las proposiciones 4.2 y 4.3.

Proposición 4.4. El operador de integración fraccionaria es un operador lineal, es decir cumple con las siguientes propiedades:

1. ${}_aI_x^{\alpha}(f+g)(x) = {}_aI_x^{\alpha} f(x) + {}_aI_x^{\alpha} g(x)$ **(4.34)**

2. ${}_aI_x^{\alpha}\lambda f(x) = \lambda\, {}_aI_x^{\alpha} f(x) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ **(4.35)**

Demostración

1. $${}_aI_x^{\alpha}(f+g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^a (x-t)^{\alpha-1}(f+g)(s)\,ds$$

$${}_aI_x^{\alpha}(f+g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^a (x-t)^{\alpha-1} f(s)\,ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^a (x-t)^{\alpha-1} g(s)\,ds$$

$${}_aI_x^{\alpha}(f+g)(x) = {}_aI_x^{\alpha} f(x) + {}_aI_x^{\alpha} g(x) \quad \blacksquare$$

2. $${}_aI_x^{\alpha}\lambda f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\lambda f(s)\,ds$$

$${}_aI_x^\alpha \lambda f(x) = \lambda \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(s)\,ds$$

$${}_aI_x^\alpha \lambda f(x) = \lambda\, {}_aI_x^\alpha f(x) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$ ■

4.3.1.4. Operador integral de orden fraccionario de la función constante

Proposición 4.5. Si $f(x) = C$ es una función constante entonces

$${}_aI_x^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^\alpha \tag{4.36}$$

Demostración

Por definición 4.1, de la integral de orden fraccionario, se tiene

$${}_aI_x^\alpha C = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} C\,ds$$

$${}_aI_x^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} ds \tag{4.37}$$

Haciendo cambio de variable: $u = x - s \;\Rightarrow \left.\begin{array}{l} Si\ s \to x \Rightarrow u \to 0 \\ Si\ s \to a \Rightarrow u \to x-a \\ ds = -du \end{array}\right\}$ **(4.38)**

Reemplazando **(4.38)** en **(4.37)** se tiene

$${}_aI_x^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-a}^0 u^{\alpha-1}(-du)$$

$${}_aI_x^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} u^{\alpha-1} du$$

$${}_aI_x^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{u^{\alpha-1+1}}{\alpha}\right]_0^{x-a}$$

$$_aI_x^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{(x-a)^\alpha}{\alpha} - 0\right]$$

$$_aI_x^\alpha C = \frac{C}{\alpha\Gamma(\alpha)}(x-a)^\alpha$$

Teniendo en cuenta el teorema 2.6 (a), ($\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$), se obtiene

$$_aI_x^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^\alpha \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4.6. Use la proposición 4.5 para calcular la integral fraccionaria de orden $\alpha = 1/2$ y $a = 0$ de $f(x) = 1$

Solución

De la proposición 4.5
$$_aI_x^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^\alpha$$

$$_0I_x^{1/2}(1) = \frac{1}{\Gamma(1/2+1)}(x-0)^{1/2}$$

$$_0I_x^{1/2}(1) = \frac{1}{(1/2)\Gamma(1/2)}x^{1/2}$$

$$_0I_x^{1/2}(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{1/2} \qquad \blacksquare$$

4.3.1.5. Operador integral de orden fraccionario de la función potencia

Proposición 4.6. Si $f(x) = (x-a)^\beta$, $\beta > 0$, $x > a$ entonces

$$_aI_x^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta} \qquad \textbf{(4.39)}$$

Demostración

Por definición 4.1 de la integral de orden fraccionario se tiene

$$ {}_aI_x^{\alpha}(x-a)^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}(s-a)^{\beta}ds \qquad \textbf{(4.40)}$$

Con la sustitución $s=a+t(x-a)$ de donde se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} s-a=t(x-a)\\ x-s=(x-a)(1-t)\\ Si\ s\to x\ \Rightarrow\ t\to 1\\ Si\ s\to a\ \Rightarrow\ t\to 0\\ ds=(x-a)dt \end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.41)}$$

Reemplazando **(4.41)** en **(4.40)** se tiene

$$ {}_aI_x^{\alpha}(x-a)^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 [(x-a)(1-t)]^{\alpha-1}[t(x-a)]^{\beta}\ (x-a)dt$$

$$ {}_aI_x^{\alpha}(x-a)^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{(\beta+1)-1}(1-t)^{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1}(x-a)^{\beta}(x-a)\ dt$$

$$ {}_aI_x^{\alpha}(x-a)^{\beta}=\frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{(\beta+1)-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt$$

Luego por la definición de la función beta se obtiene

$$ {}_aI_x^{\alpha}(x-a)^{\beta}=\frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}B(\beta+1,\alpha)$$

Teniendo en cuenta el teorema 2.7 (a) $B(\beta+1,\alpha)=\dfrac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}$ se obtiene

$$ {}_aI_x^{\alpha}(x-a)^{\beta}=\frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}$$

$$ {}_aI_x^{\alpha}(x-a)^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta},\ \ \alpha,\beta>0,\ \ x>a \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4.7. Use la proposición 4.6 para calcular la integral fraccionaria de orden $\alpha = 1/3$ y $a = 4$ de $f(x) = (x-4)^{1/2}$

Solución

De la proposición 4.6 ${}_aI_x^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}, \ \alpha,\beta>0, \ x>a$

$$ {}_4I_x^{1/3}(x-4)^{1/2} = \frac{\Gamma(1/2+1)}{\Gamma(1/3+1/2+1)}(x-4)^{1/3+1/2} $$

$$ {}_4I_x^{1/3}(x-4)^{1/2} = \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(11/6)}(x-4)^{5/6} $$

Por el teorema 2.6 (Función Gamma) y la tabla 1 se obtiene

$$ {}_4I_x^{1/3}(x-4)^{1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2(0{,}9407...)}(x-4)^{5/6} \qquad \blacksquare $$

Proposición 4.7. Si $f(x) = x^{\beta}$, $\beta > -1, \ x > 0$ entonces

$$ {}_0I_x^{\alpha}x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta} \tag{4.42} $$

Demostración

Por definición 4.1 de la integral de orden fraccionario se tiene

$$ {}_0I_x^{\alpha}x^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}s^{\beta}ds \tag{4.43} $$

Con la sustitución $s = tx \Rightarrow t = \dfrac{s}{x}$ de donde se tiene:

$$ \left.\begin{array}{l} x-s = x(1-t) \\ Si\ s \to x \ \Rightarrow \ t \to 1 \\ Si\ s \to 0 \ \Rightarrow \ t \to 0 \\ ds = xdt \end{array}\right\} \tag{4.44} $$

Reemplazando **(4.44)** en **(4.43)** se tiene

$$ {}_0I_x^{\alpha} x^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [x(1-t)]^{\alpha-1} (tx)^{\beta}\, x dt $$

$$ {}_0I_x^{\alpha}\, x^{\beta} = \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{(\beta+1)-1} (1-t)^{\alpha-1} dt $$

$$ {}_0I_x^{\alpha}\, x^{\beta} = \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1,\alpha) $$

Teniendo en cuenta el teorema 2.7 (a) $B(\beta+1,\alpha) = \dfrac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}$ se obtiene

$$ {}_0I_x^{\alpha} x^{\beta} = \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} $$

$$ {}_0I_x^{\alpha}\, x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} x^{\alpha+\beta} $$

$$ {}_aI_x^{\alpha} x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}, \;\; \beta > -1, \;\; x > a \qquad \blacksquare $$

Ejemplo 4.8. Use la proposición 4.7 para calcular la integral fraccionaria de orden $\alpha = 1/2$ de $f(x) = x^{-1/2}$.

Solución

De la proposición 4.7 $\quad {}_0I_x^{\alpha} x^{\beta} = \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}, \;\; \beta > -1, \;\; x > a$

$$ {}_0I_x^{1/2} x^{-1/2} = \frac{\Gamma(-1/2+1)}{\Gamma(1/2-1/2+1)} x^{1/2-1/2} $$

$$ {}_0I_x^{1/2} x^{-1/2} = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} = \sqrt{\pi} \qquad \blacksquare $$

4.3.1.6. Integral de orden fraccionario de la función logarítmica

Proposición 4.8. Si $f(x)=\ln(x-a)$ tal que $x>a$ entonces

$$ {}_aI_x^{\alpha}\ln(x-a)=\frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}[\ln(x-a)-\gamma-\psi(\alpha+1)] \qquad \textbf{(4.45)}$$

Demostración

Por la definición de la integral fraccionaria se tiene

$$ {}_aI_x^{\alpha}\ln(x-a)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}\ln(s-a)\,ds \qquad \textbf{(4.46)}$$

y haciendo un cambio de variable: $s=a+t(x-a)$ de donde se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} s-a=t(x-a) \\ x-s=(x-a)(1-t) \\ Si\ s\to x\ \Rightarrow\ t\to 1 \\ Si\ s\to a\ \Rightarrow\ t\to 0 \\ ds=(x-a)dt \end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.47)}$$

Reemplazando **(4.47)** en **(4.46)** se tiene

$$ {}_aI_x^{\alpha}\ln(x-a)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 [(x-a)(1-t)]^{\alpha-1}\ln[t(x-a)]\,(x-a)\,dt$$

$$ {}_aI_x^{\alpha}\ln(x-a)=\frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}\ln[t(x-a)]\ dt$$

$$ {}_aI_x^{\alpha}\ln(x-a)=\frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}[\ln t+\ln(x-a)]\ dt$$

$$ {}_aI_x^{\alpha}\ln(x-a)=\frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\ln(x-a)\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}\,dt+\frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}\ln t\,dt \qquad \textbf{(4.48)}$$

Desarrollando la primera integral y haciendo cambio de variable en la segunda integral de (4.30): $u=1-t$ de donde se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} t=1-u \\ Si\ t\to 1 \Rightarrow u\to 0 \\ Si\ t\to 0 \Rightarrow u\to 1 \\ dt=-du \end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.49)}$$

y reemplazando **(4.49)** en **(4.48)**

$${}_aI_x^\alpha \ln(x-a)=\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\ln(x-a)\frac{1}{\alpha}+\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_1^0 u^{\alpha-1}\ln(1-u)(-du)$$

$${}_aI_x^\alpha \ln(x-a)=\frac{(x-a)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\ln(x-a)-\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 u^{\alpha-1}\ln(1-u)\,du$$

luego se sabe que $d(1-u^\alpha)=-\alpha u^{\alpha-1}du$ de donde $u^{\alpha-1}du=-\dfrac{d(1-u^\alpha)}{\alpha}$, y reemplazando en la ecuación anterior

$${}_aI_x^\alpha \ln(x-a)=\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\ln(x-a)+\frac{(x-a)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \ln(1-u)\,d(1-u^\alpha)$$

integrando por partes: $\int v\,dw=vw-\int w\,dv$

$${}_aI_x^\alpha \ln(x-a)=\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\ln(x-a)+\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\left((1-u^\alpha)\ln(1-u)\right)_0^1+\int_0^1\frac{1-u^\alpha}{1-u}du\right]$$

$${}_aI_x^\alpha \ln(x-a)=\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\ln(x-a)+\left((1-u^\alpha)\ln(1-u)\right)_0^1+\int_0^1\frac{1-u^\alpha}{1-u}du\right]$$

Aplicando el teorema 2.8 (c) de la función digamma

$${}_aI_x^\alpha \ln(x-a)=\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\ln(x-a)-\gamma-\psi(\alpha+1)\right] \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4.9. Use la proposición 4.8 para calcular la integral fraccionaria de orden $\alpha=1/3$ de $f(x)=\ln(x-2)$.

Solución

De la proposición 4.8 $\quad {}_aI_x^\alpha \ln(x-a) = \dfrac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\ln(x-a)-\gamma-\psi(\alpha+1)\right]$

$$ {}_2I_x^{1/3}\ln(x-2) = \frac{(x-2)^{1/3}}{\Gamma(1/3+1)}\left[\ln(x-2)-\gamma-\psi\left(\frac{1}{3}+1\right)\right] $$

Por el teorema 2.8, la tabla 2 de la función digamma y el teorema 2.6 de la función gamma se obtiene

$$ {}_2I_x^{1/3}\ln(x-2) = \frac{(x-2)^{1/3}}{\Gamma(4/3)}\left[\ln(x-2)-\gamma-\left(\psi\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{1/3}\right)\right] $$

$$ {}_2I_x^{1/3}\ln(x-2) = \frac{(x-2)^{1/3}}{\Gamma(4/3)}\left[\ln(x-2)-\gamma-\left(-\gamma-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{3}{2}\ln 3+\frac{1}{1/3}\right)\right] $$

$$ {}_2I_x^{1/3}\ln(x-2) = \frac{(x-2)^{1/3}}{(0{,}8930\ldots)}\left[\ln(x-2)+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\frac{3}{2}\ln 3-3\right] \qquad \blacksquare $$

Proposición 4.9. Si $f(x)=\ln x$ tal que $x>a$ entonces

$$ {}_0I_x^\alpha \ln x = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}[\ln x-\gamma-\psi(\alpha+1)] \tag{4.50} $$

Demostración

Por la definición 4.1 de la integral fraccionaria se tiene

$$ {}_0I_x^\alpha \ln x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}\ln s\, ds \tag{4.51} $$

Con la sustitución $s=tx \wedge t=\dfrac{s}{x}$

se tiene:
$$ \left.\begin{array}{l} x-s=x(1-t) \\ Si\ s\to x \Rightarrow t\to 1 \\ Si\ s\to 0 \Rightarrow t\to 0 \\ ds = x\,dt \\ \ln s = \ln tx \end{array}\right\} \tag{4.52} $$

Reemplazando **(4.52)** en **(4.51)** se tiene

$$ {}_0I_x^{\alpha} \ln x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [x(1-t)]^{\alpha-1} \ln(tx)\, x\, dt $$

$$ {}_0I_x^{\alpha} \ln x = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} (\ln t + \ln x)\, dt $$

$$ {}_0I_x^{\alpha} \ln x = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \ln x \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}\, dt + \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} \ln t\, dt \qquad \textbf{(4.53)} $$

desarrollando la primera integral y haciendo cambio de variable en la segunda integral de **(4.53)**: $u = 1 - t$ de donde se obtiene:

$$ \left.\begin{array}{l} t = 1 - u \\ Si\ t \to 1 \Rightarrow u \to 0 \\ Si\ t \to 0 \Rightarrow u \to 1 \\ dt = -du \end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.54)} $$

reemplazando **(4.54)** en **(4.53)**:

$$ {}_0I_x^{\alpha} \ln x = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \ln x \frac{1}{\alpha} + \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^0 u^{\alpha-1} \ln(1-u)(-du) $$

$$ {}_0I_x^{\alpha} \ln x = \frac{x^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \ln x - \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^{\alpha-1} \ln(1-u)\, du $$

Luego se sabe que:

$d(1-u^{\alpha}) = -\alpha u^{\alpha-1} du$, de donde $u^{\alpha-1} du = -\dfrac{d(1-u^{\alpha})}{\alpha}$, y reemplazando en la ecuación anterior

$$ {}_0I_x^{\alpha} \ln x = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \ln x + \frac{x^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \ln(1-u)\, d(1-u^{\alpha}) $$

integrando por partes: $\int v\, dw = vw - \int w\, dv$

$$ {}_aI_x^{\alpha} \ln x = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \ln x + \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\left((1-u^{\alpha}) \ln(1-u)\right)_0^1 + \int_0^1 \frac{1-u^{\alpha}}{1-u}\, du \right] $$

$$ {}_0I_x^{\alpha} \ln x = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\ln x + \left((1-u^{\alpha}) \ln(1-u) \right)_0^1 - \int_0^1 \frac{1-u^{\alpha}}{1-u} du \right] $$

aplicando el teorema 2.8 (c) de la función digamma

$$ {}_0I_x^{\alpha} \ln x = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\ln x - \gamma - \psi(\alpha+1) \right] \qquad \blacksquare $$

Ejemplo 4.10. Use la proposición 4.9 para calcular la integral fraccionaria de orden $\alpha = 1/4$ de $f(x) = \ln x$.

Solución

De la proposición 4.9 $\quad {}_0I_x^{\alpha} \ln x = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\ln x - \gamma - \psi(\alpha+1) \right]$

$$ {}_0I_x^{1/4} \ln x = \frac{x^{1/4}}{\Gamma(1/4+1)} \left[\ln x - \gamma - \psi(1/4+1) \right] $$

Por el teorema 2.8, la tabla 2 de la función digamma y el teorema 2.6 de la función gamma se obtiene

$$ {}_0I_x^{1/4} \ln x = \frac{x^{1/4}}{\Gamma(5/4)} \left[\ln x - \gamma - \left(\psi\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{1/4} \right) \right] $$

$$ {}_0I_x^{1/4} \ln x = \frac{x^{1/4}}{\Gamma(5/4)} \left[\ln x - \gamma - \left(-\gamma - \frac{\pi}{2} - 3\ln 2 + \frac{1}{1/4} \right) \right] $$

$$ {}_0I_x^{1/4} \ln x = \frac{x^{1/4}}{(0{,}9064\ldots)} \left[\ln x + \frac{\pi}{2} + 3\ln 2 - 4 \right] \qquad \blacksquare $$

4.3.2. Derivación de orden fraccionario

4.3.2.1. Operador de derivación de orden fraccionario

Para motivar la definición del operador de derivación de orden fraccionario, recordemos la definición 2.1 (c) que establece la notación D^n para indicar las *n*-veces que se repite D $\forall\ n \in \mathbb{N}$, es decir

$$D^1 f(x) = Df(x)$$

$$D^n f(x) = DD^{n-1} f(x)$$

para $n \geq 2$.

Proposición 4.10. Dadas las funciones $f(x) = (x-a)^m$, $g(x) = x^m$ y $h(x) = x^\beta$, entonces se cumple:

(a) $D^n (x-a)^m = \dfrac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-n)}(x-a)^{m-n}$; $m, n \in \mathbb{Z}^+$ y $m \geq n$, $x > a$ **(4.55)**

(b) $D^n x^m = \dfrac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-n)} x^{m-n}$; $m, n \in \mathbb{Z}^+$ y $m \geq n$ **(4.56)**

(c) $D^\alpha x^\beta = \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}$; $\beta, \alpha \in \mathbb{R}^+$ y $\beta > \alpha$ **(4.57)**

Demostración

Veamos las derivadas de las potencias de $f(x) = (x-a)^m$

$D^0 (x-a)^m = (x-a)^m$

$D^1 (x-a)^m = m(x-a)^{m-1}$

$D^2 (x-a)^m = m(m-1)(x-a)^{m-2}$

$D^3 (x-a)^m = m(m-1)(m-2)(x-a)^{m-3}$

$\vdots$

$D^n (x-a)^m = m(m-1)(m-2)...(m-n+1)(x-a)^{m-n}$ **(4.58)**

multiplicando y dividiendo a **(4.58)** por $(m-n)!$ se obtiene

$$D^n(x-a)^m = \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)(m-n)!}{(m-n)!}(x-a)^{m-n}$$

$$D^n(x-a)^m = \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)(m-n)(m-n-1)...3\cdot 2\cdot 1}{(m-n)(m-n-1)(m-n-2)...3\cdot 2\cdot 1}(x-a)^{m-n}$$

$$D^n(x-a)^m = \frac{m!}{(m-n)!}(x-a)^{m-n}$$

pero por el teorema 2.6 de la función gamma se obtiene

$$D^n(x-a)^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-n)}(x-a)^{m-n} \qquad \blacksquare$$

Ahora si la función es $g(x) = x^m$, entonces en el resultado anterior se hace $a=0$ y se obtiene

$$D^n x^m = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-n)}x^{m-n} \qquad \blacksquare$$

La proposición 4.10 (b) se puede generalizar para un orden no entero n, es decir para $n=\alpha,\ m=\beta \ \in \mathbb{R}^+$, obteniéndose una generalización del operador derivada fraccionaria de la función $h(x) = x^\beta$.

$$D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{\beta-\alpha} \ ; \ \beta,\alpha \in \mathbb{R}^+ \ , \ \beta > \alpha \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4.11. Si $f(x) = x^{3/2}$, calcular su derivada de orden $1/2$, usando la proposición 4.10 (c).

Solución

Aplicando la proposición 4.10 (c), el teorema 2.6 (Función gamma) y la tabla 1 se obtiene

$$D^{\alpha}x^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{\beta-\alpha}\ ;\ \ \beta,\alpha\in\mathbb{R}^{+},\ \beta>\alpha$$

$$D^{1/2}x^{3/2}=\frac{\Gamma(3/2+1)}{\Gamma(3/2-1/2+1)}x^{3/2-1/2}$$

$$D^{1/2}x^{3/2}=\frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(2)}x$$

$$D^{3/2}x^{1/2}=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}x \qquad \blacksquare$$

Habiendo establecido las propiedades fundamentales del operador integral, a continuación se motivó la definición, recordando el lema 2.2 que (bajo ciertas condiciones) establece la identidad

$$D^{n}f(x)=D^{m}{}_{a}I_{x}^{m-n}f(x)$$

donde m y n son números enteros tales que $m>n.$ Supongamos ahora que n no es un número entero, es decir $n\in\mathbb{R}^{+}$, entonces ¿se cumplirá la igualdad anterior? En la proposición 4.10 (a) $D^{n}(x-a)^{m}=\dfrac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-n)}(x-a)^{m-n}\ ;\ m,n\in\mathbb{Z}^{+}$ y $m\geq n,\ x>a,$ reemplazamos $n=\alpha,\ m=\beta\in\mathbb{R}^{+}$ y se obtiene una generalización del operador derivada fraccionaria de $f(x)=(x-a)^{m}$

$$D^{\alpha}(x-a)^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}\ ;\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}^{+}\ \text{ y }\ \beta\geq\alpha,\ x>a,$$

$$D^{\alpha}(x-a)^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)}\frac{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1-m)}(x-a)^{m-\alpha+\beta-m}$$

pero nuevamente por la proposición 4.10 (a) se obtiene

$$D^m (x-a)^{m-\alpha+\beta} = \frac{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1-m)}(x-a)^{m-\alpha+\beta-m}$$

entonces

$$D^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)} D^m (x-a)^{m-\alpha+\beta}$$

$$D^\alpha (x-a)^\beta = D^m \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)}(x-a)^{m-\alpha+\beta}$$

pero por la proposición 4.6: ${}_aI_x^\alpha (x-a)^\beta = \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}$, se obtiene

$${}_aI_x^{m-\alpha} (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)}(x-a)^{m-\alpha+\beta}$$

entonces se cumple $D^\alpha (x-a)^\beta = D^m {}_aI_x^{m-\alpha} (x-a)^\beta$ para $\alpha \in \mathbb{R}^+$, donde esta última igualdad es la derivada de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ para la función $f(x) = (x-a)^m$. Pero si f es cualquier función que está en C^m entonces se tiene la siguiente:

Definición 4.3. Si $m = [[\alpha]]+1,\ m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$, entonces el operador ${}_aD_x^\alpha$ definido por

$${}_aD_x^\alpha f(x) = D^m {}_aI_x^{m-\alpha} f(x) \qquad \textbf{(4.59)}$$

se llama operador de derivación fraccionaria de orden α de una función $f \in C^m$. Donde $m-1 \le \alpha < m \Leftrightarrow [[\alpha]] = m-1$.

Observación 4.4.

1. ${}_aI_x^{m-\alpha}$ representa el operador integral fraccionario de orden $m-\alpha$ definido por

$${}_aI_x^{m-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t)\,dt\,.$$

2. La ecuación (4.59) se puede escribir de la siguiente forma

$$ {}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t)\,dt \right) $$

3. Para $\alpha = 0$, obtenemos el operador identidad ${}_aD_x^0 f(x) = I(x)$.
4. Una vez más vemos que, como consecuencia del lema 2.2, el operador recién definido ${}_aD_x^{\alpha}$ coincide con el operador diferencial clásico D^n siempre que $\alpha = n \in \mathbb{N}$.
5. En el lema 2.2 no habíamos requerido que *m* sea tan pequeño como sea posible; de hecho arbitrario para números naturales *m* se permitió siempre que la desigualdad $m > n$ estaba satisfecha. La declaración similar se mantiene aquí.
6. $m = [[\alpha]] + 1$
7. El operador diferencial fraccionario ${}_aD_x^{\alpha}$ tiene límites, desde a hasta x, pues porque resulta del operador integral fraccionario ${}_aI_x^{\alpha}$.

Ejemplo 4.12. Use la definición 4.3 para calcular la derivada fraccional de la función $f(x) = x^{3/2}$ de orden $\alpha = 1/2$.

Solución

Por la definición 4.3 $\quad {}_aD_x^{\alpha} f(x) = D^m\, {}_aI_x^{m-\alpha} f(x),\ m = [[\alpha]] + 1$

$$ {}_0D_x^{1/2}(x^{3/2}) = D^1\, {}_0I_x^{1-1/2}(x^{3/2}),\ m = [[1/2]] + 1 = 1 $$

$$ {}_0D_x^{1/2}(x^{3/2}) = D^1\, {}_0I_x^{1/2}(x^{3/2}) $$

$$ {}_0D_x^{1/2}(x^{3/2}) = D^1 \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x (x-s)^{1/2-1} s^{3/2} ds \qquad \textbf{(4.60)} $$

Haciendo cambio de variable: $s = t\,x \quad \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Si\ s \to x\ \Rightarrow\ t \to 1 \\ Si\ s \to 0\ \Rightarrow\ t \to 0 \\ ds = x dt \end{array} \right\} \qquad \textbf{(4.61)}$

Reemplazando **(4.61)** en **(4.60)** se obtiene

$$ {}_0D_x^{1/2}(x^{3/2}) = D^1 \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^1 (x-tx)^{1/2-1}(tx)^{5/2-1} x ds $$

$$ {}_0D_x^{1/2}(x^{3/2}) = D^1 \frac{x^2}{\Gamma(1/2)} \int_0^1 (1-t)^{1/2-1}(t)^{5/2-1} ds $$

Luego por la definición 2.6 (Función Beta), los teoremas 2.7 (Función beta), 2.6 (Función gamma) y la tabla 1 se obtiene

$$ {}_0D_x^{1/2}(x^{3/2}) = D^1 \frac{x^2}{\Gamma(1/2)} B\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right) $$

$$ {}_0D_x^{1/2}(x^{3/2}) = D^1 \frac{x^2}{\Gamma(1/2)} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(5/2)}{\Gamma(1/2+5/2)} $$

$$ {}_0D_x^{1/2}(x^{3/2}) = D^1 \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(2+1)} x^2 $$

$$ {}_0D_x^{1/2}(x^{3/2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} x \qquad \blacksquare $$

Observación 4.5.

El ejemplo 4.11 se resolvió usando la proposición 4.10 (c) y el ejemplo 4.12 se resolvió usando la definición 4.3 y en ambos se obtuvo la misma derivada.

Ejemplo 4.13. Use la definición 4.3 para calcular la derivada fraccional de la función $f(x) = (x-1)^{1/2}$ de orden $\alpha = 1/3$ y $a = 1$.

Solución

Usando la definición 4.3 ${}_aD_x^{\alpha} f(x) = D^m {}_aI_x^{m-\alpha} f(x)$

${}_1D_x^{1/3}(x-1)^{1/2} = D^1 {}_1I_x^{1-1/3}(x-1)^{1/2}$, $m = [[\alpha]]+1 = [[1/3]]+1 = 1$

$${}_1D_x^{1/3}(x-1)^{1/2} = D^1\,{}_1I_x^{2/3}(x-1)^{1/2}$$

luego por la proposición 4.6 ${}_aI_x^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}$, $\beta > 0$, $x > a$

$${}_1I_x^{2/3}(x-1)^{1/2} = \frac{\Gamma(1/2+1)}{\Gamma(2/3+1/2+1)}(x-1)^{2/3+1/2} = \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(13/6)}(x-1)^{7/6},$$

luego se tiene

$${}_1D_x^{1/3}(x-1)^{1/2} = D^1\frac{\Gamma(3/2)}{(7/6)\Gamma(7/6)}(x-1)^{7/6}$$

$${}_1D_x^{1/3}(x-1)^{1/2} = \frac{(7/6)\Gamma(3/2)}{(7/6)\Gamma(7/6)}(x-1)^{1/6}$$

$${}_1D_x^{1/3}(x-1)^{1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(7/6)}(x-1)^{1/6} = \frac{\sqrt{\pi}}{2(0{,}9277...)}(x-1)^{1/6} \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4.14. Use la definición 4.3 para calcular la derivada fraccional de la función $f(x) = \ln(x-2)$ de orden $\alpha = 1/4$ y $a = 2$.

Solución

Por definición 4.3: ${}_aD_x^{\alpha} f(x) = D^m\,{}_aI_x^{m-\alpha} f(x)$

$${}_2D_x^{1/4}\ln(x-2) = D^1\,{}_2I_x^{1-1/4}\ln(x-2), \quad m = [[\alpha]]+1 = [[1/4]]+1 = 1$$

$${}_2D_x^{1/4}\ln(x-2) = D^1\,{}_2I_x^{3/4}\ln(x-2)$$

Por la proposición 4.8, el teorema 2.8 (a) y la tabla 2 se obtiene

$${}_2D_x^{1/4}\ln(x-2) = D^1\left(\frac{(x-2)^{3/4}}{\Gamma(3/4+1)}[\ln(x-2) - \gamma - \psi(3/4+1)]\right)$$

Por el teorema 2.8 (a) $\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z}$, $z>0$ se obtiene

$$ {}_2D_x^{1/4}\ln(x-2)=D^1\left(\frac{(x-2)^{3/4}}{\Gamma(7/4)}[\ln(x-2)-\gamma-\psi(3/4)-\frac{1}{3/4}]\right) $$

$$ {}_2D_x^{1/4}\ln(x-2)=\frac{1}{\Gamma(7/4)}D^1\left((x-2)^{3/4}\ln(x-2)-[\gamma+\psi(3/4)+\frac{4}{3}](x-2)^{3/4}\right) $$

$$ {}_2D_x^{1/4}\ln(x-2)=\frac{1}{\Gamma(7/4)}\left((x-2)^{-1/4}\left[\frac{3}{4}\ln(x-2)+1\right]-[\gamma+\psi(3/4)+\frac{4}{3}]\frac{3}{4}(x-2)^{-1/4}\right) $$

Luego por la tabla 2: Valores de la función digamma, se tiene

$$ {}_2D_x^{1/4}\ln(x-2)=\frac{(x-2)^{-1/4}}{(3/4)\Gamma(3/4)}\left(\left[\frac{3}{4}\ln(x-2)+1\right]-[\gamma-\gamma+\frac{\pi}{2}-3\ln 2+\frac{4}{3}]\frac{3}{4}\right) $$

$$ {}_2D_x^{1/4}\ln(x-2)=\frac{(3/4)(x-2)^{-1/4}}{(3/4)\Gamma(3/4)}\left(\left[\ln(x-2)+\frac{4}{3}\right]-[\frac{\pi}{2}-3\ln 2+\frac{4}{3}]\right) $$

$$ {}_2D_x^{1/4}\ln(x-2)=\frac{(x-2)^{-1/4}}{(1{,}2254\ldots)}\left(\ln(x-2)-\frac{\pi}{2}+3\ln 2\right) \qquad \blacksquare $$

4.3.2.2. Proposiciones del operador de derivación fraccionaria

Proposición 4.11. Sea $\alpha\in\mathbb{R}^+$ y sea $m\in\mathbb{N}$ tal que $m>\alpha.$ Entonces

$$ {}_aD_x^{\alpha}f(x)=D^m\,{}_aI_x^{m-\alpha}f(x) \qquad \textbf{(4.62)} $$

Demostración

De la observación 4.2 (5) y $m>\alpha$, implican que $m\geq[[\alpha]]$. Por lo tanto,

$$ D^m\,{}_aI_x^{m-\alpha}=D^{[[\alpha]]}D^{m-[[\alpha]]}\,{}_aI_x^{m-[[\alpha]]}\,{}_aI_x^{[[\alpha]]-\alpha} $$

$$ D^m\,{}_aI_x^{m-\alpha}=D^{[[\alpha]]}\,{}_aI_x^{[[\alpha]]-\alpha} $$

$$ D^m\,{}_aI_x^{m-\alpha}={}_aD_x^{\alpha} $$

Este resultado se obtuvo por la proposición 4.10 (Semigrupo o ley de exponentes),

la ecuación **(2.1)**: $D^n\,{}_aI_x^n f(x)=f(x)$ y el lema 2.2:

$$D^n f(x) = D^m {}_aI_x^{m-n} f(x) \qquad \blacksquare$$

La siguiente proposición contiene una condición suficiente muy simple para la existencia de ${}_aD_x^{\alpha} f$.

Proposición 4.12. Sea $f \in AC[a,b]$ y $0 < \alpha < 1$. Entonces ${}_aD_x^{\alpha} f$ existe en casi todas partes en $[a,b]$. Además ${}_aD_x^{\alpha} f \in L_p[a,b]$ para $1 \le p < \frac{1}{\alpha}$ y

$$ {}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{-\alpha}\,dt \right) \qquad \textbf{(4.63)}$$

Demostración

Utilizamos la definición 4.3 del operador de derivación fraccionaria y el hecho de que $f \in AC^1$. Esto produce

$$ {}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)(x-t)^{-\alpha}\,dt$$

Se sabe que $\int_a^t f'(u)\,du = \left[f(u)\right]_a^t = f(t) - f(a)$, entonces

$$f(t) = f(a) + \int_a^t f'(u)\,du$$

$$ {}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \left(f(a) + \int_a^t f'(u)\,du \right)(x-t)^{-\alpha}\,dt$$

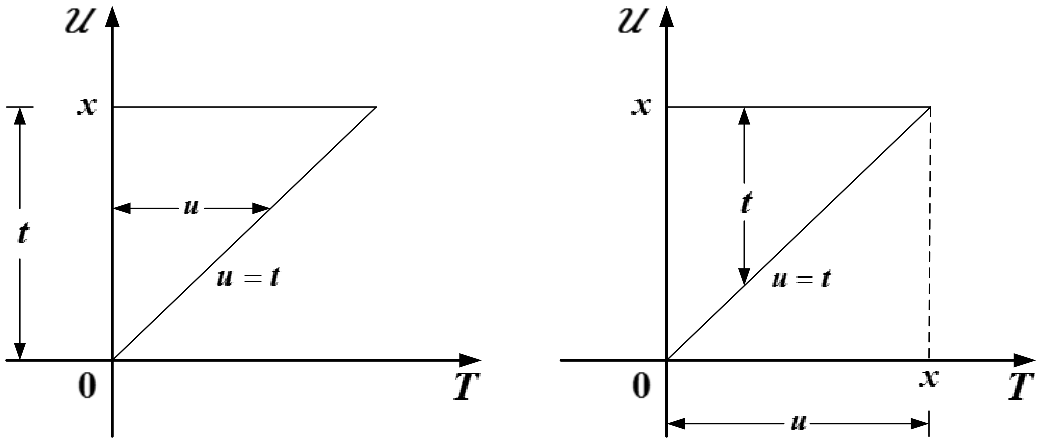
$$ {}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left(f(a)\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}} + \int_a^x\int_a^t f'(u)(x-t)^{-\alpha}\,du\,dt \right)$$

$$ {}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{d}{dx}\int_a^x\int_a^t f'(u)(x-t)^{-\alpha}\,du\,dt \right)$$

Por el teorema 2.3 (Fubini) podemos intercambiar el orden de integración en la integral doble

$$\int_a^x\int_a^t f'(u)(x-t)^{-\alpha}\,du\,dt$$

Supongamos que $a = 0$, entonces el dominio de integración se ilustra en la figura 4 (a). Cambiando el orden de integración como se muestra en la figura 4 (b), se obtiene



$\mathbf{0 \le u \le t,\ 0 \le t \le x}$ $\qquad$ $\mathbf{0 \le u \le x,\ u \le t \le x}$

(a) $\int_0^x \int_0^s f'(x-t)^{-\alpha}\, du\, dt$ $\qquad$ **(b)** $\int_0^x \int_u^x f'(u)(x-t)^{-\alpha}\, dt\, du$

Figura 4. Dominios de integración $\mathbf{0 \le u \le t,\ 0 \le t \le x;\ 0 \le u \le x,\ u \le t \le x}$
Fuente: Elaboración propia

$${}_aD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \frac{d}{dx}\int_a^x\int_u^x f'(u)(x-t)^{-\alpha}\,dt\,du\right)$$

$${}_aD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \frac{d}{dx}\int_a^x f'(u)\int_u^x (x-t)^{-\alpha}\,dt\,du\right)$$

$${}_aD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} - \frac{d}{dx}\int_a^x f'(u)\left[\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_u^x du\right)$$

$${}_aD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} - \frac{d}{dx}\int_a^x f'(u)\left[-\frac{(x-u)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]du\right)$$

$${}_aD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \frac{d}{dx}\int_a^x f'(u)\frac{(x-u)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,du\right)$$

$${}_aD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{-\alpha}\,dt\right) \qquad \blacksquare$$

Proposición 4.13. Supongamos que α_1, $\alpha_2 \geq 0$. Por otra parte sea $\phi \in L_1[a,b]$ y $f(x) = {}_aI_x^{\alpha_1+\alpha_2}\phi(x)$. Entonces

$$ {}_aD_x^{\alpha_1}\, {}_aD_x^{\alpha_2} f(x) = {}_aD_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) \qquad \textbf{(4.64)} $$

Demostración

Por la suposición de $f(x) = {}_aI_x^{\alpha_1+\alpha_2}\phi(x)$, la definición 4.3 del operador de derivación fraccionaria y si $\begin{cases} p \leq \alpha_1 < p+1 \Leftrightarrow [[\alpha_1]] = p \\ q \leq \alpha_2 < q+1 \Leftrightarrow [[\alpha_2]] = q \end{cases}$, $p, q \in \mathbb{N}$, entonces se obtiene

$$ {}_aD_x^{\alpha_1}\, {}_aD_x^{\alpha_2} f(x) = {}_aD_x^{\alpha_1}\, {}_aD_x^{\alpha_2}\, {}_aI_x^{\alpha_1+\alpha_2}\phi(x) $$

$$ {}_aD_x^{\alpha_1}\, {}_aD_x^{\alpha_2} f(x) = D^p\, {}_aI_x^{p-\alpha_1} D^q\, {}_aI_x^{q-\alpha_2}\, {}_aI_x^{\alpha_1+\alpha_2}\phi(x) $$

por la proposición 4.2 (Semigrupo o ley de exponentes),

$$ {}_aD_x^{\alpha_1}\, {}_aD_x^{\alpha_2} f(x) = D^p\, {}_aI_x^{p-\alpha_1} D^q\, {}_aI_x^{q-\alpha_2}\, {}_aI_x^{\alpha_1}\, {}_aI_x^{\alpha_2}\phi(x) $$

$$ {}_aD_x^{\alpha_1}\, {}_aD_x^{\alpha_2} f(x) = D^p\, {}_aI_x^{p} D^q\, {}_aI_x^{q}\phi(x) $$

$$ {}_aD_x^{\alpha_1}\, {}_aD_x^{\alpha_2} f(x) = D^p\, {}_aI_x^{p}\phi(x) $$

$$ {}_aD_x^{\alpha_1}\, {}_aD_x^{\alpha_2} f(x) = \phi(x) \qquad \textbf{(4.65)} $$

En forma similar

$$ {}_aD_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) = {}_aD_x^{\alpha_1+\alpha_2}\, {}_aI_x^{\alpha_1+\alpha_2}\phi(x) $$

si $r \leq \alpha_1 + \alpha_2 < r+1 \Leftrightarrow [[\alpha_1 + \alpha_2]] = r$, $r \in \mathbb{N}$ se tiene

$$ {}_aD_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) = D^r\, {}_aI_x^{r-(\alpha_1+\alpha_2)}\, {}_aI_x^{\alpha_1+\alpha_2}\phi(x) $$

$$ {}_aD_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) = D^r\, {}_aI_x^{r}\phi(x) $$

$$ {}_aD_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) = \phi(x) \qquad \textbf{(4.66)} $$

De **(4.65)** y **(4.66)** se obtiene ${}_aD_x^{\alpha_1}\,{}_aD_x^{\alpha_2} f(x)={}_aD_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x)$ ■

Ejemplo 4.15. Sea $f(x)=x^{-1/2}$ y $\alpha_1=\alpha_2=1/2$, calcular

a) ${}_0D_x^{\alpha_1} f(x),$

b) ${}_0D_x^{\alpha_2} f(x),$

c) ${}_0D_x^{\alpha_1}\,{}_0D_x^{\alpha_2} f(x),$

d) ${}_0D_x^{\alpha_2}\,{}_0D_x^{\alpha_1} f(x),$

e) ${}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x)$

Solución 4.15.a) ${}_0D_x^{\alpha_1} f(x)$

Aplicando la definición 4.3 ${}_aD_x^{\alpha} f(x)=D^m\,{}_aI_x^{m-\alpha} f(x)$, $m=[[\alpha_1]]+1=1,$ se obtiene

$${}_aD_x^{1/2}(x^{-1/2})=D^1\,{}_aI_x^{1-1/2}(x^{-1/2})\ ,\ m=[[1/2]]+1=1$$

$${}_aD_x^{1/2}(x^{-1/2})=D^1\,{}_aI_x^{1/2}(x^{-1/2})$$

y por la proposición 4.7**,**

para $f(x)=x^{\beta}$, ${}_0I_x^{\alpha}x^{\beta}=\dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta}$ $,\beta>-1,\ x>0,$ entonces se tiene

$${}_0D_x^{1/2}(x^{-1/2})=D^1\left(\frac{\Gamma(-1/2+1)}{\Gamma(1/2-1/2+1)}\right)x^{1/2-1/2}=0$$ ■

Solución 4.15.b) ${}_0D_x^{\alpha_2} f(x)$

En forma similar que **a)** se obtiene ${}_0D_x^{\alpha_2} f(x)={}_0D_x^{1/2}(x^{-1/2})=0$ ■

Solución 4.15.c) ${}_0D_x^{\alpha_1}\,{}_0D_x^{\alpha_2} f(x)$

Aplicando la definición 4.3 (${}_aD_x^{\alpha} f(x) = D^m {}_aI_x^{m-\alpha} f(x)$) y

$m = [[\alpha_2]] + 1 = [[1/2]] + 1 = 1$, se obtiene

$${}_0D_x^{\alpha_1} {}_0D_x^{\alpha_2} f(x) = {}_0D_x^{\alpha_1}\left({}_0D_x^{\alpha_2} f(x)\right)$$

Por la parte b), se sabe que ${}_0D_x^{\alpha_2} f(x) = {}_0D_x^{1/2}(x^{-1/2}) = 0$ entonces

$${}_0D_x^{\alpha_1} {}_0D_x^{\alpha_2} f(x) = {}_0D_x^{\alpha_1}[0]$$

Nuevamente desarrollamos ${}_0D_x^{\alpha_1}[0]$ como anteriormente, es decir

$${}_0D_x^{\alpha_1} {}_0D_x^{\alpha_2} f(x) = D^m {}_0I_x^{m-\alpha_1}[0]$$

$${}_0D_x^{\alpha_1} {}_0D_x^{\alpha_2} f(x) = D^1 {}_0I_x^{1/2}[0]$$

Pero por la proposición 4.5 ${}_aI_x^{\alpha} C = \dfrac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha}$ si $f(x) = C$ es una función constante, entonces sí $C = 0,$ se tiene ${}_0I_x^{1/2}[0] = 0$ y $D^1[0] = 0$ por lo tanto

$${}_0D_x^{\alpha_1} {}_0D_x^{\alpha_2} f(x) = 0\,, \quad si \quad f(x) = x^{-1/2}, \alpha_1 = \alpha_2 = 1/2 \qquad \textbf{(4.67)} \ \blacksquare$$

Solución 4.15.d) ${}_0D_x^{\alpha_2} {}_0D_x^{\alpha_1} f(x)$

En forma similar que **c)** se obtiene

$${}_0D_x^{\alpha_2} {}_0D_x^{\alpha_1} f(x) = 0\,, \quad si \quad f(x) = x^{-1/2}, \alpha_1 = \alpha_2 = 1/2 \qquad \textbf{(4.68)} \ \blacksquare$$

Solución 4.15.e) ${}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x)$

Ahora calculamos ${}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x)$ si $f(x) = x^{-1/2}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1/2,$ entonces usando la definición 4.3, la proposición 4.7 y $m = [[\alpha]] + 1 = [[1]] + 1 = 2$ se tiene

$${}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) = {}_0D_x^1 x^{-1/2}$$

$${}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) = D^2 {}_0I_x^{2-1} x^{-1/2}$$

$${}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) = D^2 \frac{\Gamma(-1/2+1)}{\Gamma(1-1/2+1)} x^{1-1/2}$$

$${}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) = D^2 \frac{\Gamma(1/2)}{(1/2)\Gamma(1/2)} x^{1/2}$$

$${}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) = D^2 2x^{1/2} = D^1 x^{-1/2}$$

$${}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) = -\frac{1}{2} x^{-3/2}$$

Por tanto se concluye que

$${}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) = -\frac{1}{2} x^{-3/2}, \quad si \quad f(x) = x^{-1/2}, \; \alpha_1 = \alpha_2 = 1/2 \qquad \textbf{(4.69)} \;\blacksquare$$

Observación 4.6.

De las ecuaciones **(4.67)**, **(4.68)** y **(4.69)** se obtiene

$${}_0D_x^{\alpha_1}\,{}_0D_x^{\alpha_2} f(x) = {}_0D_x^{\alpha_2}\,{}_0D_x^{\alpha_1} f(x) \neq {}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x)$$

Ejemplo 4.16. Sea $f(x) = x^{1/2}$, $\alpha_1 = 1/2$ y $\alpha_2 = 3/2$. Calcular

a) ${}_0D_x^{\alpha_1} f(x)$,

b) ${}_0D_x^{\alpha_2} f(x)$,

c) ${}_0D_x^{\alpha_1}\,{}_0D_x^{\alpha_2} f(x)$,

d) ${}_0D_x^{\alpha_2}\,{}_0D_x^{\alpha_1} f(x)$,

e) ${}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x)$

Solución 4.16.a) ${}_0D_x^{\alpha_1} f(x)$

Aplicando la definición 4.3 ${}_aD_x^{\alpha_1} f(x) = D^m\,{}_aI_x^{m-\alpha_1} f(x)$,

$m = [[\alpha_1]] + 1 = [[1/2]] + 1 = 1$, se obtiene

$${}_aD_x^{1/2}(x^{1/2}) = D^1\,{}_aI_x^{1-1/2}(x^{1/2})$$

$${}_aD_x^{1/2}(x^{1/2}) = D^1\,{}_aI_x^{1/2}(x^{1/2})$$

Por el ejemplo 4.4 (a) se sabe que ${}_0I_x^{1/2}(x^{1/2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}x$, entonces

$${}_aD_x^{1/2}(x^{1/2}) = D^1\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}x\right)$$

$${}_aD_x^{1/2}(x^{1/2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \blacksquare$$

Solución 4.16.b) ${}_0D_x^{\alpha_2} f(x)$

Aplicando la definición 4.3 ${}_aD_x^{\alpha_2} f(x) = D^m\,{}_aI_x^{m-\alpha_2} f(x)$,

$m = [[\alpha_2]] + 1 = [[3/2]] + 1 = 2$ se obtiene

$${}_aD_x^{3/2}(x^{1/2}) = D^2\,{}_aI_x^{2-3/2}(x^{1/2})$$

$${}_aD_x^{3/2}(x^{1/2}) = D^2\,{}_aI_x^{1/2}(x^{1/2})$$

Por el ejemplo 4.4 (a) se sabe que ${}_0I_x^{1/2}(x^{1/2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}x$, entonces

$${}_aD_x^{3/2}(x^{1/2}) = D^2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}x\right)$$

$${}_aD_x^{3/2}(x^{1/2}) = D^1\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

$${}_aD_x^{3/2}(x^{1/2}) = 0 \qquad \blacksquare$$

Solución 4.16.c) ${}_0D_x^{\alpha_1}\,{}_0D_x^{\alpha_2} f(x)$

$$ {}_0D_x^{\alpha_1}\, {}_0D_x^{\alpha_2} f(x) = {}_0D_x^{\alpha_1}\left({}_0D_x^{\alpha_2} f(x)\right) $$

$$ {}_0D_x^{1/2}\, {}_0D_x^{3/2}(x^{1/2}) = {}_0D_x^{1/2}\left({}_0D_x^{3/2}(x^{1/2})\right) $$

Por la parte **b)** se tiene que ${}_aD_x^{3/2}(x^{1/2}) = 0,$ entonces

$$ {}_0D_x^{1/2}\, {}_0D_x^{3/2}(x^{1/2}) = {}_0D_x^{1/2}(0), $$

$n = [[\alpha_1]] + 1 = [[1/2]] + 1 = 1$

$$ {}_0D_x^{1/2}\, {}_0D_x^{3/2}(x^{1/2}) = D^1\, {}_0I_x^{1-1/2}(0) $$

$$ {}_0D_x^{1/2}\, {}_0D_x^{3/2}(x^{1/2}) = D^1\, {}_0I_x^{1/2}(0) $$

Pero por la proposición 4.5 si $f(x) = C$ es una función constante, entonces sí $C = 0$ se tiene ${}_0I_x^{1/2}(0) = \dfrac{0}{\Gamma(1/2+1)} x^{1/2} = 0$, entonces

$$ {}_0D_x^{1/2}\, {}_0D_x^{3/2}(x^{1/2}) = D^1(0) $$

$$ {}_0D_x^{1/2}\, {}_0D_x^{3/2}(x^{1/2}) = 0 $$

$$ {}_0D_x^{\alpha_1}\, {}_0D_x^{\alpha_2} f(x) = 0, \quad si \quad f(x) = x^{1/2},\ \alpha_1 = 1/2,\ \alpha_2 = 3/2 \qquad \textbf{(4.70)} \ \blacksquare $$

Solución 4.16.d) ${}_0D_x^{\alpha_2}\, {}_0D_x^{\alpha_1} f(x)$

$$ {}_0D_x^{\alpha_2}\, {}_0D_x^{\alpha_1} f(x) = {}_0D_x^{\alpha_2}\left({}_0D_x^{\alpha_1} f(x)\right) $$

$$ {}_0D_x^{3/2}\, {}_0D_x^{1/2}(x^{1/2}) = {}_0D_x^{3/2}\left({}_0D_x^{1/2}(x^{1/2})\right) $$

Por la parte **a)** se tiene que ${}_aD_x^{1/2}(x^{1/2}) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ y entonces

$$ {}_0D_x^{3/2}\, {}_0D_x^{1/2}(x^{1/2}) = {}_0D_x^{3/2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right), $$

$n = [[\alpha_2]] + 1 = [[3/2]] + 1 = 2$

$$ {}_0D_x^{3/2}\,{}_0D_x^{1/2}(x^{1/2}) = D^2\,{}_0I_x^{2-3/2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) $$

$$ {}_0D_x^{3/2}\,{}_0D_x^{1/2}(x^{1/2}) = D^2\,{}_0I_x^{1/2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) $$

Pero por la proposición 4.5: ${}_aI_x^{\alpha}C = \dfrac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha}$ si $f(x)=C$ es una función

constante, entonces sí $C=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, se tiene ${}_0I_x^{1/2}\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}/2}{\Gamma(1/2+1)}x^{1/2} = x^{1/2}$,

entonces

$$ {}_0D_x^{3/2}\,{}_0D_x^{1/2}(x^{1/2}) = D^2\left(x^{1/2}\right) $$

$$ {}_0D_x^{3/2}\,{}_0D_x^{1/2}(x^{1/2}) = D^1\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) $$

$$ {}_0D_x^{3/2}\,{}_0D_x^{1/2}(x^{1/2}) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} $$

$$ {}_0D_x^{\alpha_2}\,{}_0D_x^{\alpha_1}f(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2},\quad si\quad f(x)=x^{1/2},\ \alpha_1=1/2,\ \alpha_2=3/2 \qquad \textbf{(4.71)} \ \blacksquare $$

Solución 4.16.e) ${}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2}f(x)$

Ahora calculamos ${}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2}f(x)$ si $f(x)=x^{1/2}$, $\alpha_1=1/2, \alpha_2=3/2$ entonces usando la definición 4.3, la proposición 4.7 y $m=[[\alpha]]+1=[[2]]+1=3$ se obtiene

$$ {}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2}f(x) = {}_0D_x^2 x^{1/2} $$

$$ {}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2}f(x) = D^3\,{}_0I_x^{3-2}x^{1/2} $$

$$ {}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2}f(x) = D^3\,\frac{\Gamma(1/2+1)}{\Gamma(1+1/2+1)}x^{1+1/2} $$

$$ {}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2}f(x) = D^3\,\frac{(1/2)\Gamma(1/2)}{(3/2)(1/2)\Gamma(1/2)}x^{3/2} $$

$$ {}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) = D^3 \frac{2}{3} x^{3/2} $$

$$ {}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) = D^2 x^{1/2} $$

$$ {}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) = D^1 \frac{1}{2} x^{-1/2} $$

$$ {}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2} $$

$$ {}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2}, \quad si \quad f(x) = x^{1/2}, \ \alpha_1 = 1/2, \ \alpha_2 = 1/2 \qquad \textbf{(4.72)} \ \blacksquare $$

Observación 4.7.

De las ecuaciones **(4.70)**, **(4.71)** y **(4.72)** es posible tener:

$$ {}_0D_x^{\alpha_1} \, {}_0D_x^{\alpha_2} f(x) \neq {}_0D_x^{\alpha_2} \, {}_0D_x^{\alpha_1} f(x) = {}_0D_x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x) $$

Recordemos que una de las características claves que queríamos conseguir era la ecuación (2.1): $D^n \, {}_aI_x^n f(x) = f(x),$ para $n \notin \mathbb{N}$.

Proposición 4.14. Sea $\alpha \geq 0$. Entonces, para cada $f \in L_1[a,b]$,

$$ {}_aD_x^{\alpha} \, {}_aI_x^{\alpha} f(x) = f(x) \qquad \textbf{(4.73)} $$

se cumple en casi todas partes de $[a,b]$.

Demostración

Para el caso $\alpha = 0$ es trivial entonces ${}_aD_x^{\alpha}$ y ${}_aI_x^{\alpha}$ son ambos el operador identidad.

Para $\alpha > 0$, si $r \leq \alpha < r+1 \Leftrightarrow [[\alpha]] = r$, $r \in \mathbb{N}$ entonces, por la proposición 4.2 (Semigrupo: ${}_aI_x^{\alpha} \, {}_aI_x^{\beta} f(x) = {}_aI_x^{\alpha+\beta} f(x)$), definición 4.3 (${}_aD_x^{\alpha} f(x) = D^m \, {}_aI_x^{m-\alpha} f(x)$) y la ecuación (2.1) ($D^n \, {}_aI_x^n f(x) = f(x)$).

$$ {}_aD_x^{\alpha} \, {}_aI_x^{\alpha} f(x) = D^r \, {}_aI_x^{r-\alpha} \, {}_aI_x^{\alpha} f(x) = D^r \, {}_aI_x^{r} f(x) = f(x) \qquad \blacksquare $$

Proposición 4.15. Sea f_1 y f_2 dos funciones definidas en $[a,b]$ tal que ${}_aD_x^{\alpha} f_1$ y ${}_aD_x^{\alpha} f_2$ existen casi en todas partes. Además, sean c_1 , $c_2 \in \mathbb{R}$. Entonces, ${}_aD_x^{\alpha}(c_1 f_1 + c_2 f_2)$ existe casi en todas partes, y

$$ {}_aD_x^{\alpha}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(x) = c_1 {}_aD_x^{\alpha} f_1(x) + c_2 {}_aD_x^{\alpha} f_2(x) \qquad \textbf{(4.74)} $$

Demostración

Esta propiedad de linealidad del operador de derivación fraccionaria es una consecuencia inmediata de la definición 4.3.

$$ {}_aD_x^{\alpha}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(x) = D^m {}_aI_x^{m-\alpha}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(x)dt $$

$$ {}_aD_x^{\alpha}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(x) = D^m \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(t) \right] dt $$

$$ {}_aD_x^{\alpha}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(x) = D^m \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left[c_1 \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f_1(t)\,dt + c_2 \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f_2(t)\,dt \right] $$

$$ {}_aD_x^{\alpha}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(x) = D^m \left[\frac{c_1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f_1(t)\,dt \right] $$

$$ + D^m \left[\frac{c_2}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f_2(t)\,dt \right] $$

$$ {}_aD_x^{\alpha}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(x) = D^m \left[c_1 {}_aI_x^{m-\alpha} f_1(x) \right] + D^m \left[c_2 {}_aI_x^{m-\alpha} f_2(x) \right] $$

$$ {}_aD_x^{\alpha}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(x) = c_1 D^m \left[{}_aI_x^{m-\alpha} f_1(x) \right] + c_2 D^m \left[{}_aI_x^{m-\alpha} f_2(x) \right] $$

$$ {}_aD_x^{\alpha}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(x) = c_1 \; {}_aD_x^{\alpha} f_1(x) + c_2 \; {}_aD_x^{\alpha} f_2(x) $$

$$ {}_aD_x^{\alpha}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(x) = (c_1 {}_aD_x^{\alpha} f_1 + c_2 {}_aD_x^{\alpha} f_2)(x) \qquad \blacksquare $$

Después de haber establecido una teoría de los operadores de integración y de derivación fraccionarias por separado, ahora investigamos cómo interactúan. Un primer resultado muy importante en este contexto ya se ha demostrado en la proposición 4.14**:** ${}_aD_x^{\alpha} {}_aI_x^{\alpha} f(x) = f(x)$ donde ${}_aD_x^{\alpha}$ es la inversa por la izquierda de ${}_aI_x^\alpha$. Por supuesto, no podemos afirmar que es la inversa por la derecha. Más precisamente, tenemos la siguiente situación.

Proposición 4.16. Sea $\alpha > 0$. Si existe algún $\phi \in L_1[a,b]$ tal que $f(x) = {}_aI_x^\alpha \phi(x)$ entonces

$$ {}_aI_x^\alpha \, {}_aD_x^\alpha f(x) = f(x) \qquad \textbf{(4.75)} $$

se cumple en casi todas partes de $[a,b]$.

Demostración

Esta es una consecuencia inmediata de un resultado anterior. Tenemos, por la definición de $f(x) = {}_aI_x^\alpha \phi(x)$ y la proposición 4.14: ${}_aD_x^\alpha \, {}_aI_x^\alpha f(x) = f(x)$ que

$$ {}_aI_x^\alpha \, {}_aD_x^\alpha f(x) = {}_aI_x^\alpha \left[{}_aD_x^\alpha f(x) \right] = {}_aI_x^\alpha \left[{}_aD_x^\alpha \, {}_aI_x^\alpha \phi(x) \right] = {}_aI_x^\alpha \phi(x) = f(x) \qquad \blacksquare $$

4.3.2.3. Derivada de orden fraccionario de la función potencia

Proposición 4.17. Sea $f(x) = (x-a)^\beta$ para $\beta > 0$ y $\alpha > 0$. Entonces,

$$ {}_aD_x^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \qquad \textbf{(4.76)} $$

Demostración

Usando la definición 4.3 ${}_aD_x^\alpha f(x) = D^m \, {}_aI_x^{m-\alpha} f(x)$

$$ {}_aD_x^\alpha (x-a)^\beta = D^m \, {}_aI_x^{m-\alpha} (x-a)^\beta $$

luego por la proposición 4.6 ${}_aI_x^\alpha (x-a)^\beta = \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}$, $\beta > 0$, $x > a$

$$ {}_aD_x^\alpha (x-a)^\beta = D^m \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)}(x-a)^{m-\alpha+\beta} $$

$$ {}_aD_x^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)} D^m (x-a)^{m-\alpha+\beta} $$

por la proposición 4.10 (a) $D^n(x-a)^m = \dfrac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-n)}(x-a)^{m-n}$; $m,n\in\mathbb{Z}^+$ y

$$m\geq n \quad {}_aD_x^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)}\frac{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1-m)}(x-a)^{m-\alpha+\beta-m}$$

$${}_aD_x^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4.17. Use la proposición 4.17 para calcular la derivada fraccionaria de la función $f(x)=(x-1)^{1/2}$ de orden $\alpha=1/3$ y $a=1$.

Solución

Por la proposición 4.17: ${}_aD_x^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}$, se tiene

$${}_1D_x^{1/3}(x-1)^{1/2} = \frac{\Gamma(1/2+1)}{\Gamma(1/2-1/3+1)}(x-1)^{1/2-1/3}$$

$${}_1D_x^{1/3}(x-1)^{1/2} = \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(7/6)}(x-1)^{1/6}$$

$${}_1D_x^{1/3}(x-1)^{1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(7/6)}(x-1)^{1/6}$$

$${}_1D_x^{1/3}(x-1)^{1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2(0{,}9272...)}(x-1)^{1/6} \qquad \blacksquare$$

Observación 4.8.

El ejemplo 4.17 se resolvió usando la proposición 4.17 y el ejemplo 4.13 se resolvió usando la definición 4.3 y en ambos se obtuvo la misma derivada.

4.3.2.4. Derivada de orden fraccionario de la función logarítmica

Proposición 4.18. Sea $f(x)=\ln(x-a)$, $x>a$ entonces,

$${}_aD_x^{\alpha}\ln(x-a) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}[\ln(x-a)-\gamma-\psi(1-\alpha)] \qquad \textbf{(4.77)}$$

Demostración

Por definición 4.3: ${}_aD_x^{\alpha} f := D^m \, {}_aI_x^{m-\alpha} f$

$${}_aD_x^{\alpha} \ln(x-a) = D^m \, {}_aI_x^{m-\alpha} \ln(x-a)$$

Por la proposición 4.8: $\left({}_aI_x^{\alpha} \ln(x-a) = \dfrac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\big[\ln(x-a) - \gamma - \psi(\alpha+1)\big]\right)$

$${}_aD_x^{\alpha} \ln(x-a) = D^m\left(\frac{(x-a)^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)}[\ln(x-a) - \gamma - \psi(m-\alpha+1)]\right)$$

$${}_aD_x^{\alpha} \ln(x-a) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} D^m\Big((x-a)^{m-\alpha}\ln(x-a)\Big) - \frac{\gamma+\psi(\alpha+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)} D^m (x-a)^{m-\alpha}$$

, y por el teorema 2.5 (c): $D^n(fg)(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D^k f(x) D^{n-k} g(x)$ y la proposición

4.10(a): $D^n(x-a)^m = \dfrac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-n)}(x-a)^{m-n}$; $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $m \geq n$ se tiene

$${}_aD_x^{\alpha} \ln(x-a) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}[\ln(x-a) - \gamma - \psi(1-\alpha)] \quad \blacksquare$$

Ejemplo 4.18. Use la proposición 4.18 para calcular la derivada fraccionaria de la función $f(x) = \ln(x-2)$ de orden $\alpha = 1/4$ y $a = 2$.

Solución

Por la proposición 4.18: ${}_aD_x^{\alpha} \ln(x-a) = \dfrac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}[\ln(x-a) - \gamma - \psi(1-\alpha)],$ se tiene

$${}_2D_x^{1/4} \ln(x-2) = \frac{(x-2)^{-1/4}}{\Gamma(1-1/4)}[\ln(x-2) - \gamma - \psi(1-1/4)]$$

$${}_2D_x^{1/4} \ln(x-2) = \frac{(x-2)^{-1/4}}{\Gamma(3/4)}[\ln(x-2) - \gamma - \psi(3/4)]$$

Luego aplicamos las tablas 1 y 2 de las funciones gamma y digamma

$$ {}_{2}D_{x}^{1/4}\ln(x-2)=\frac{(x-2)^{-1/4}}{(1{,}2254\ldots)}[\ln(x-2)-\gamma-(-\gamma+\frac{\pi}{2}-3\ln 2)] $$

$$ {}_{2}D_{x}^{1/4}\ln(x-2)=\frac{(x-2)^{-1/4}}{(1{,}2254\ldots)}[\ln(x-2)-\frac{\pi}{2}+3\ln 2)] \qquad \blacksquare $$

Observación 4.9.

El ejemplo 4.18 se resolvió usando la proposición 4.18 y el ejemplo 4.14 se resolvió usando la definición 4.3 y en ambos se obtuvo la misma derivada.

Ejemplo 4.19. Calcular la derivada fraccionaria de orden $\alpha=1/2$, $a=0$ para la función $f(x)=\ln x$.

Solución

Por la proposición 4.18: ${}_{a}D_{x}^{\alpha}\ln(x-a)=\dfrac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}[\ln(x-a)-\gamma-\psi(1-\alpha)]$, se obtiene

$$ {}_{0}D_{x}^{1/2}\ln x=\frac{x^{-1/2}}{\Gamma(1-1/2)}[\ln x-\gamma-\psi(1-1/2)] $$

$$ {}_{0}D_{x}^{1/2}\ln x=\frac{x^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}[\ln x-\gamma-\psi(1/2)] $$

luego aplicamos las tablas 1 y 2 de las funciones gamma y digamma respectivamente $\quad {}_{0}D_{x}^{1/2}\ln x=\dfrac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}[\ln x-\gamma+\gamma+2\ln 2]$

$$ {}_{0}D_{x}^{1/2}\ln x=\frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}[\ln x+2\ln 2] \qquad \blacksquare $$

4.4. Propuesta didáctica para la problemática de la asignatura de matemáticas en la UNJBG

Cincuenta estudiantes del primer año de la escuela de Física de la Facultad de Ciencias de la UNJBG participaron en un pretest y postest preparado para evaluar la efectividad de la didáctica universitaria de un operador de integración y derivación de orden fraccionario. Cada alumno desarrolló un cuestionario con preguntas del cálculo diferencial e integral fraccionario y después resolvió un cuestionario con la didáctica universitaria del docente. ¿Proporcionan estos datos suficientes evidencias para indicar que la didáctica universitaria es efectiva a un nivel de una significancia del 0,05?

4.4.1. Datos

Los puntajes de la encuesta a 50 estudiantes del primer año de la Escuela de Física de la Facultad de Ciencias de la UNJBG, antes y después de participar en la didáctica del cálculo diferencial e integral fraccionario, se indican en la tabla 4.

4.4.2. Estadísticos

Se realizó el análisis exploratorio de los datos y se determinó las medidas descriptivas de las variables antes y después de participar en la didáctica universitaria, las cuales se indican en las tablas 5, 6, 7 y sus histogramas en las figuras 5 y 6.

Tabla 4

Puntajes del pretest y postest a 50 estudiantes del primer año de la Escuela de Física de la Facultad de Ciencias de la UNJBG.

Código de los alumnos	Pretest Antes de la didáctica	Postest Después de la didáctica	Código de los alumnos	Pretest Antes de la didáctica	Postest Después de la didáctica
2011101001	11	15	2013-38933	11	14
2011101005	10	16	2013-38936	11	14
2011101007	12	16	2013-38938	11	16
2011101019	13	17	2013-38940	12	16
2011101051	14	15	2013-38945	11	15
2011101060	11	14	2013-38946	10	15
2011101061	10	14	2013-38948	10	15
2012-36956	11	15	2013-38949	13	15
2012-36969	12	16	2013-38950	11	17
2012-36972	13	17	2013-38952	9	17
2012-36975	12	13	2013-38955	12	14
2012-36981	12	14	2013-38956	12	15
2012-36997	10	15	2013-38959	11	16
2012-36998	12	13	2013-38960	11	17
2012-37002	11	17	2013-38961	12	15
2012-37008	10	14	2013-38962	13	16
2012-37610	11	15	2013-38964	12	15
2013-38919	12	15	2013-38965	11	17
2013-38922	14	18	2013-38966	10	15
2013-38923	8	16	2013-38967	9	16
2013-38924	11	15	2013-38968	10	17
2013-38927	12	16	2013-38969	10	16
2013-38928	12	15	2013-38970	12	16
2013-38931	11	15	2013-38972	11	17
2013-38932	12	16	2013-38975	12	17

Fuente: Elaboración propia

Tabla 5

Análisis exploratorio de datos y determinación de las medidas descriptivas antes y después de participar en la didáctica universitaria.

		Antes de la didáctica.	Después de la didáctica.
N	Válidos	50,00	50,00
	Perdidos	0,00	0,00
Media		11,28	15,50
Desviación típica		1,21	1,15
Varianza		1,47	1,32
Mínimo		8,00	13,00
Máximo		14,00	18,00

Fuente: Resultados estadísticos

Tabla 6

Frecuencia antes de la didáctica universitaria.

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	8	1	2	2	2
	9	2	4	4	6
	10	9	18	18	24
	11	16	32	32	56
	12	16	32	32	88
	13	4	8	8	96
	14	2	4	4	100
	Total	50	100	100	

Fuente: Resultados estadísticos

Tabla 7

Frecuencia Después de la didáctica universitaria.

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	13	2	4	4	4
	14	7	14	14	18
	15	17	34	34	52
	16	13	26	26	78
	17	10	20	20	98
	18	1	2	2	100
	Total	50	100	100	

Fuente: Resultados estadísticos

Histogramas

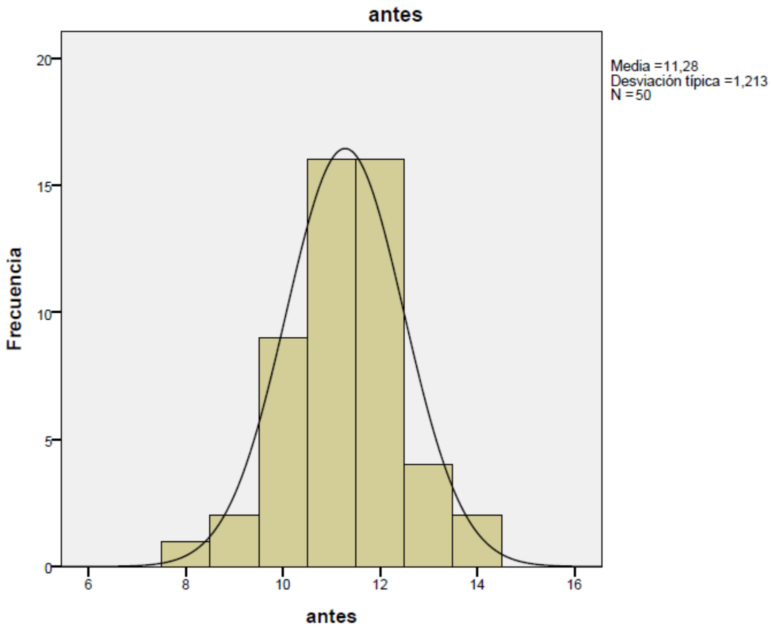


Figura 5. Histograma antes de la didáctica universitaria.
Fuente: Resultado estadístico

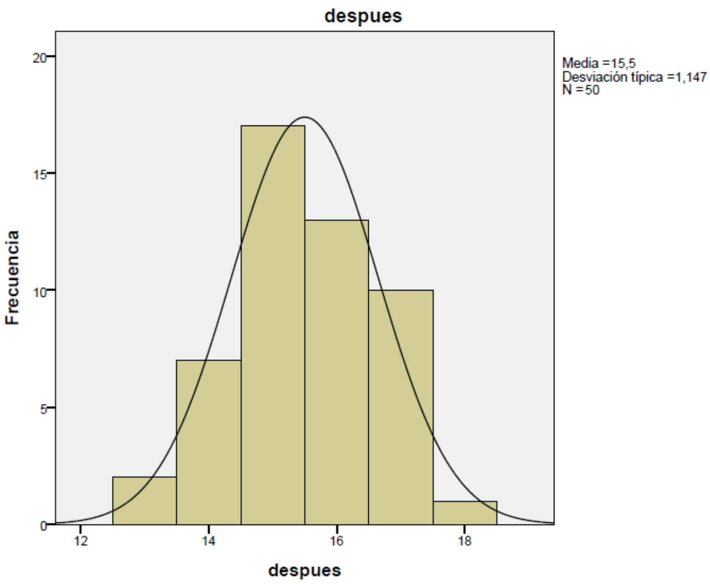


Figura 6. Histograma después de la didáctica universitaria.
Fuente: Resultado estadístico

4.4.3. Descripción y análisis de la normalidad para las diferencias

Se generó la variable diferencia:

(di) = Después de la didáctica (Postest) –Antes de la didáctica (Pretest),

en una población de 50 estudiantes cuyos resultados se muestran en la tabla 8

Tabla 8

Diferencias (di)

Código de los alumnos	Pretest Antes de la didáctica	Postest Después de la didáctica	di	Código de los alumnos	Pretest Antes de la didáctica	Postest Después de la didáctica	di
2011101001	11	15	4	2013-38933	11	14	3
2011101005	10	16	6	2013-38936	11	14	3
2011101007	12	16	4	2013-38938	11	16	5
2011101019	13	17	4	2013-38940	12	16	4
2011101051	14	15	1	2013-38945	11	15	4
2011101060	11	14	3	2013-38946	10	15	5
2011101061	10	14	4	2013-38948	10	15	5
2012-36956	11	15	4	2013-38949	13	15	2
2012-36969	12	16	4	2013-38950	11	17	6
2012-36972	13	17	4	2013-38952	9	17	8
2012-36975	12	13	1	2013-38955	12	14	2
2012-36981	12	14	2	2013-38956	12	15	3
2012-36997	10	15	5	2013-38959	11	16	5
2012-36998	12	13	1	2013-38960	11	17	6
2012-37002	11	17	6	2013-38961	12	15	3
2012-37008	10	14	4	2013-38962	13	16	3
2012-37610	11	15	4	2013-38964	12	15	3
2013-38919	12	15	3	2013-38965	11	17	6
2013-38922	14	18	4	2013-38966	10	15	5
2013-38923	8	16	8	2013-38967	9	16	7
2013-38924	11	15	4	2013-38968	10	17	7
2013-38927	12	16	4	2013-38969	10	16	6
2013-38928	12	15	3	2013-38970	12	16	4
2013-38931	11	15	4	2013-38972	11	17	6
2013-38932	12	16	4	2013-38975	12	17	5

Fuente: Elaboración propia

a) Formulación de la hipótesis

H_o: Los datos de las diferencias provienen de poblaciones normales

H_1: Los datos de las diferencias no provienen de poblaciones normales

b) Nivel de significancia: $\alpha = 0{,}05$

c) Determinación del estadístico a utilizar

Se realizó la prueba de normalidad de Kolgomorov-Smimov para las diferencias **(di)** en una población de 50 estudiantes las cuales se indican en la tabla 9 y se elaboró también su gráfico de normalidad las cuales se indican en las figuras 7 y 8.

Tabla 9
Prueba de normalidad Kolgomorov-Smimov y Shapiro-Wilk

	Kolgomorov-Smimov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig	Estadístico	gl	Sig
di	0,19	50	0,00	0,95	50	0,03

Fuente: Resultados estadísticos
[a] Corrección de la significación de Lilliefors

d) Criterio:

Rechazamos la H_0

e) Conclusión:

H_1: Los datos de las diferencias no provienen de poblaciones normales

Elaboración de la gráfica Q-Q de la diferencia (di)

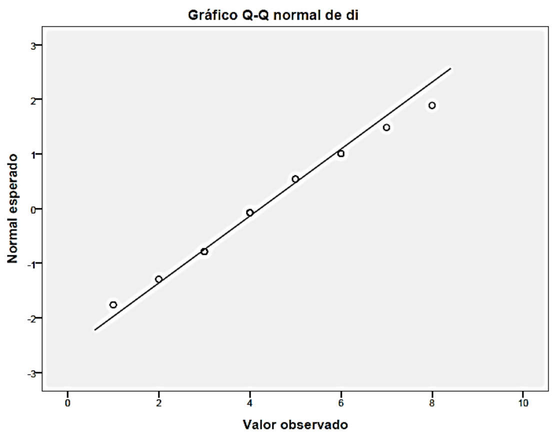


Figura 7. El gráfico de la normalidad de la diferencia
Fuente: Resultados estadísticos

Elaboración de la gráfica Q-Q sin tendencia de diferencia

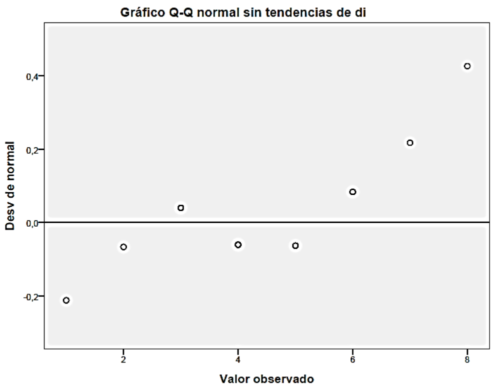


Figura 8. El gráfico de la normalidad sin tendencia de diferencia
Fuente: Resultados estadísticos

Dado que la diferencia **di**, no cumplen con el supuesto de normalidad entonces para comparar los dos grupos se va a utilizar la prueba no paramétrica de Wilcoxon.

4.4.4. Estadística de prueba no paramétrica de Wilcoxon

a) Formulación de la hipótesis

H_0: No existe diferencia entre los puntajes de evaluación del cálculo diferencial e integral fraccionario antes y después de participar en la didáctica universitaria.

H_1: Existe diferencia entre los puntajes de evaluación del cálculo diferencial e integral fraccionario antes y después de participar en la didáctica universitaria.

b) Nivel de significancia: $\alpha = 0{,}05$

c) Determinación del estadístico a utilizar

Suma de los rangos con signos positivos y negativos.

d) Cálculo del estadístico

Se realizó la prueba no paramétrica de Wilcoxon, para dos muestras relacionadas, las cuales se indican en las tablas 10 y 11.

Tabla 10

Prueba estadística no paramétrica por rangos

		N	Rango promedio	Suma de rangos
Puntaje después de la didáctica – Puntaje antes de la didáctica	Rangos negativos	0[a]	0,00	0,00
	Rangos positivos	50[b]	25,50	1275,00
	Empates	0[c]		
	Total	50		

Fuente: Resultado estadístico

[a] Puntaje después de la didáctica < Puntaje antes de la didáctica

[b] Puntaje después de la didáctica > Puntaje antes de la didáctica

[c] Puntaje después de la didáctica = Puntaje antes de la didáctica

Tabla 11

Estadístico de contraste

	después de la didáctica - antes de la didáctica
Z	-6,19[b]
Sig. asintót. (bilateral)	0,00[a]

Fuente: Resultado estadístico

[a] Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

[b] Basado en rangos negativos

e) Decisión

Como $p < 0,05$ rechazar la hipótesis nula

f) Conclusión:

Se concluye que existe diferencia entre los puntajes de evaluación del cálculo diferencial e integral fraccionario antes y después de participar en la didáctica universitaria.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

El operador de integración y el operador de derivación de orden fraccionario es una generalización de la integral ordinaria y de la derivada ordinaria respectivamente.

Las propiedades de la integral y la derivada ordinarias, bajo ciertas condiciones también se cumplen en la integral y la derivada de orden fraccionario.

De los cincuenta estudiantes que participaron en un pretest y postest preparado para evaluar la efectividad de la didáctica universitaria en la generalización de la integral y la derivada de orden ordinario a orden fraccionario, utilizando un operador de integración y derivación, en la que cada alumno desarrolló un cuestionario con preguntas del cálculo diferencial e integral fraccionario y después resolvió un cuestionario con la didáctica universitaria del docente. Las pruebas estadísticas proporcionaron datos suficientes para indicar que la didáctica universitaria es efectiva a un nivel de una significancia del 0,05.

5.2. Recomendaciones

La definición de la integral fraccionaria juega un papel importante en el desarrollo de la teoría de integración de orden fraccionario para las aplicaciones en matemáticas puras. La definición de integral fraccionaria puede ser extendida de manera natural a los semiejes infinitos, estas integrales son conocidas como integrales fraccionarias de orden α, aunque muchos autores denominan el operador como integral fraccionaria de Weyl, pues este utilizó el mencionado operador sobre dominios de funciones periódicas.

La definición de la derivada fraccionaria juega un papel importante en el desarrollo de la teoría del cálculo de orden fraccionario y en las aplicaciones de la matemática pura. Pero a pesar de los múltiples trabajos realizados por numerosos autores, no se ha desarrollado aún una teoría clara sobre las propiedades analíticas de los operadores fraccionarios que permitan dar consistencia al uso de dichos operadores en las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden fraccionario y el problema de valores iniciales correspondientes. Quedan abiertas, realizar estudios de cómo saber que definición de derivada fraccionaria es conveniente introducir en una ecuación diferencial fraccionaria.

Aplicar la teoría del cálculo fraccionario a la física cuántica, ingeniería de control y procesamiento de señales.

BIBLIOGRAFÍA

Abbas, Saïd, Benchohra Mouffak, and N'Guérékata Gaston M. (2012). *Topics in Fractional Differential Equations*. New York: Springer.

Alegría, Pedro.(2007). *Teoría de la medida*. Bilbao-España: Universidad del País Vasco.

Almeida, Ricardo, Agnieszka B. Malinowska, and Delfim F. M. Torres. (2010). *A fractional calculus of variations for multiple integrals with application to vibrating string.* Journal of Mathematical Physics 51: 1–12.

Amann, Herbert, and Joachim Escher. (2005). *Analysis I*. first. Germany: Birkhäuser Verlag.

Arafet, Padilla, Pedro, Abreu Hugo Dominguez, and Mumañ Francisco Chang. (2008). *Una introducción al cálculo fraccionario*. (1ª ed.). Cuba: Universidad del Oriente, Facultad de Ing. Eléctrica:

Artigue, Michele. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos.* Ingeniería didáctica en educación matemática. México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Artigue, Michele. (2003). *The teaching and learning of mathematics at university level*. En D. Holton et al (Eds.). An ICMI Study, Kluwer Academic Publishers.

Asplund, Edgar, and Lutz Bungart. (1966). *A first course in integration.* First. United States of America: Holt, Rinehart And Winston.

Assaleh, Khaled, and Wajdi M. Ahmad. (2007). *Modeling of speech signals using fractional calculus*. 9th International Symposium on Signal Processing and Its Applications: 1–4.

Atanacković, Teodor M., Pilipović, Stevan Stanković, Bogoljub Zorica, Dušan. (2013). *Fractional calculus with applications in mechanics*. second. Great Britain. Ed. Noël Challamel: Wiley.

Atici & Eloe. (2007). *A transform method in discrete fractional calculus*. International Journal of Difference Equations (IJDE). 2, Number : 1–12.

Ayala, Roberto, and Alfredo Tuesta. (2007). *Introduction to the concepts and applications of fractional and variable order differential calculus*. 1–17.

Bell, W. W. (1968). *Special functions for scientists and engineers*. 1st ed. Ed. Nostrand D. Van. London: D. Van Nostrand Company Ltd.

Benedito, Antoli Vicenc. (1987). *Introducción a la didáctica. Fundamentación Teórica y Diseño Curricular.* Universidad de Barcelona: 41.

Biagini, Francesca, Oksendal, Bernt Hu, Yaozhong Zhang, Tusheng. (2008). *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications*. first. Ed. J. Gani. London: Published in association with the Applied Probability Trust.

Bologna, Mauro. (2004). *Short introduction to fractional calculus*. Universidad de Tarapacá, Arica, Chile 2: 41–54.

Bowers, Adam, and Nigel J. Kalton. (2010). *An introductory course in functional Analysis*. France: Springer.

Brousseau, G.(1990). ¿*Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas*? IREM, Université de Bordeaux 1, Francia. 8(3): 259–267.

Chaudhry, M. A., and S. M. Zubair. (2002). *On a class of imcomplete Gamma functions with applications*. United States of America: Academic Press, INC.

Contreras, Domingo José. (1990). *Enseñanza, curriculum y profesorado.* Ediciones Akal S.A. 1: 30.

Das, Shantanu. (2011). *Functional fractional calculus*. Second. India: Springer.

De la Herrán, Gascón Agustín. (2001). *Didáctica universitaria: La cara dura de la Universidad*. Departamento de Didáctica y Teoría de la Educación Universidad Autónoma de Madrid: 28.

Debnath, Lokenath. (2003). *Recent applications of fractional calculus to science and engineering*. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.54: 3413–3442.

Diethelm, Kai. (2010). *The analysis of fractional differential equations*. first. Ed. Morel Cachan, Takens Groningen, and Teissier Paris. Germany: Springer.

Duarte, Ortigueira Manuel. (2011). *Fractional calculus for scientists and engineers.* 84th ed. Portugal: Springer.

Ferreira, Ruiac, and Delfim F. M. Torres. (2011). *Fractional H -difference equations arising from the calculus of variations.* Publication In Applicable Analysis and Discrete mathematics. 1: 1–11.

Gascón, Josep. (1998). *Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*. Departamento de Matemáticas Universidad Autónoma de Barcelona Vol. 18/1: pp. 7–33.

Guardales Garcia , Roger.(2004). *"Investigación y enseñanza de la matemática."* Sociedad matematica peruana.Primera ed.Peru.

Guerra, J. A., and S. L. Kalla. (1990). *Aplicaciones del cálculo fraccional para resolver ecuaciones diferenciales*. Rev. Téc. Ing.. Univ. Zulia 13 (1).1: 6.

Hernández, Sampieri R., Fernandez Collado C. y Baptista Lucio M. (2010). *Metodologia de la investigación.* Quinta edición. McGraw-Hill. Mexico.

Hernández, Zúñiga Oscar Genaro. (2007). *Introducción a la didáctica.* primera ed. Ed. Universidad Santander. Mexico.

Herrmann, Richard. (2013). *Uniqueness of the fractional derivative definition.*1–5.

Ishteva, M, R Scherer, and L Boyadjiev. (2000). *On the Caputo operator of fractional calculus and C-Laguerre functions.* 2000: 14.

Kilbas, Anatoly, Hari Srivastava, and Juan Trujillo. (2006). *Theory and applications fractional differential equations*. Ed. Jan van Mil. First. Amsterdam: Elsevier.

Klafter, Joseph, S. C. Lim, and Ralf Metzler. (2012). *Fractional dynamics: Recent Advances*. Ed. Joseph Klafter and Ralf Metzler. Singapore: World Scientific.

Kreyszig, Erwin, Herbert Kreyszig, and Edward J. Norminton. (2011). *Advanced engineering mathematics*. Tenth. United States of America: John Wiley & Sons, Inc.

Kulish, Vladimir V., and José L. Lage. (2002). *Applications of fractional calculus to fluid mechanics*. Fluids Engineering 124: 803–806.

Lakshmikantham, V, and A S Vatsala. (2007). *Theory of fractional differential inequalities and aplications.* Communications in Applied Analysis 11: 395–402.

Larson, Ron, and Bruce Edwards. (2013). *Calculus.* tenth. United States of America: Brooks/Cole Cengage Learning.

Levedev, N. N. (1972). *Special functions and their applications*. First. London: Prentice-Hall, Inc.

Loverro, Adam. (2004). *Fractional calculus : History , definitions and applications for the engineer*. Department Of Aerospace and Mechanical Engineering University of Notre Dame: 1–28.

Magin, R.L., and M. Ovadia. (2008). *Modeling the cardiac tissue electrode interface using fractional calculus.* Journal of Vibration and Control 14.9-10: 1431–1442.

Mainardi, Francesco. (2010). *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity*. first. Singapore: Imperial College Press.

Martínez, Rafael, Jardón H. León, Jorge A. León, G. Fernández-Anaya. (2009). *Estabilización de redes complejas fraccionarias de sistemas de Lorenz modificados y sistemas de Chen*. Asociación de México de Control Automático 1: 6.

Martínez, S. Héctor E. (2012). *Una novedosa definición de la transformada fraccionaria de Fourier y sus aplicaciones*. Asociación de México de Control Automático: 42–46.

Mathieu, B., Melchior, P. Oustaloup, A. Ceyral, Ch. (2003). *Fractional differentiation for edge detection.* Signal Processing 83.11: 2421–2432.

Medina, Leidy Yoana, and Francisco Cabrera. (2010). *Aplicación del cálculo fraccional a la perdida de energia en la propagación de ondas sísmicas.* Asociación Argentina de Mecánica Computacional XXIX: 15–18.

Medina, Rivilla Antonio. (2009). *Didáctica general.* Segunda edición. Pearson Educación. Madrid.

Meerschaert, Mark M., and Alla Sikorskii. (2012). *Stochastic Models for Fractional Calculus*. first. Ed. Carsten Carstensen and Nicola Fusco. Germany: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG.

Moreno, Moreno María del Mar (2005). *El papel de la didáctica en la enseñanaza del cálculo:evolución, estado actual y retos futuros*. En Maz, Alexander; Gómez, Bernardo; Torralbo, Manuel (Eds.), Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM. Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Oldham, Keith B., and Jerome Spanier. (1974). *The fractional calculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Ed. Richard Bellman. 111th ed. United States of America: Academic Press, INC.

Petrás, Ivo. (2011). *Fractional-Order nonlinear systems: Modeling, analysis and simulation*. first. Beijing: Springer.

Pierantozzi, Teresa. (2006). *Estudio de generalizaciones fraccionarias de las ecuaciones estándar de difusión y de ondas.* Universidad Complutense de Madrid.

Purcell, Edwin J., Dale Varberg, and Steven E. Rigdon. (2007). *Cálculo diferencial e integral.* Novena edición. Pearson-Educación. Mexico.

Rahimy, Mehdi. (2010). *Applications of fractional differential equations*. Applied Mathematical Science 4.50: 2453–2461.

Reyes, Melo Edgar, Salazar Carlos Guerrero, y Méndez Ubaldo Ortiz. (2005). *Aplicación del cálculo fraccional en el modelado de la viscoelásticidad en polímeros.* VIII, Número: 47–55.

Richardson, Leonard F. (2009). *Measure And Integration: A concise introduction to real analysis.* first. United States of America: Wiley.

Rosen, Kenneth H. (2012). *Discrete Mathematics and Its Applications*. Seventh Edition. United States. McGraw-Hill.

Ross, Bertram. (1975). *Fractional calculus and its applications*. First. Germany.

Ross, Kenneth A. (2013). *Elementary analysis*. Second. United States of America: Springer.

Sánchez, Muñoz José Manuel. (2011). *Génesis y desarrollo del cálculo fraccional*. Pensamiento matemático 1: 1–15.

Sauchelli, Victor Hugo, and Sergio Laboret. (2007). *Cálculo fraccional aplicado a control automático*. Asociación Argentina de Mecánica Computacional xxvi : 3308–3327.

Sebaa, N., Fellah Z.E.A., Lauriks W. Depollier C. (2006). *Application of fractional calculus to ultrasonic wave propagation in human cancellous bone*. Signal Processing 86.10: 2668–2677.

Soczkiewicz, Eugeniusz. (2002). *Application of fractional calculus in the theory of viscoelasticity*. Molecular and Quantum Acoustic 23: 8.

Suárez, J. I., Vinagre, B. M. Calderón, A. J. Monje, C. A. Chen, Y. Q. (2002). *Using fractional calculus for lateral and longitudinal control of autonomous vehicles*. Universidad de Extremadura, Badajoz - Spain: 1–12.

Tarasov, Vasily E. (2011). *Fractional stability*. Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics 3.2: 1–5.

Tarasov, Vasily E. (2010). *Fractional dynamics: Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media.* First. Moscow: Springer.

Tenreiro, Machado J. A., Virginia Kiryakova, and Francesco Mainardi. (2010). *Recent history of fractional calculus.* Communications In Nonlinear Science And Numerical Simulation: 14.

Uchaikin Vladimir V. (*2013*). *Fractional derivatives for physicists and engineers*. first. I. Beijing: Springer.

Vasquez, Luis, and Pilar Velasco. (2011). *El cálculo fraccionario como Instrumento de modelización.* Prepublicaciones del Departamento de Matemática Aplicada: Universidad Complutense de Madrid: 20.

Vinagre, J. B., Calderón G. A., Suárez M. J., Monje M. C. (2005). *Teoría de control y cálculo fraccionario.* Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp) 200: 1–18.

Von Borries, Borries Andrea Magdalena. (2012). *Estudio y simulación de sistemas adaptables fraccionarios*. Universidad de Chile.

Yusof Mohammad y Tall David. (1999). C*hanging attitudes to university mathematics through problem solving.* Educational Studies in Mathematics. Vol. 37.

Zabalza, Beraza Miguel A. (2007). *La didáctica universitaria*. Universidad de Santiago de Compostela: 489–509.

Zill, Dennis G., and Warren S. Wright. (2011). *Cálculo de varias variables.* Cuarta edición. McGraw-Hill. China.